

# chapitre 8 Les Nombres Complexes

## I Définition

Soit  $i$  le nombre imaginaire tel que  $i^2 = -1$

On appelle nombre complexe tout nombre

$$z = a + b i \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ deux réels.}$$

...

# chapitre 8 Les Nombres Complexes

## I Définition

Soit  $i$  le nombre imaginaire tel que  $i^2 = -1$

On appelle nombre complexe tout nombre

$$z = a + b i \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ deux réels.}$$

$a$  est la partie réelle du n<sup>b</sup> compl.  $z$

$b$  est la partie imaginaire du n<sup>b</sup> compl.  $z$

# chapitre 8 Les Nombres Complexes

## I Définition

Soit  $i$  le nombre **imaginaire** tel que  $i^2 = -1$

On appelle **nombre complexe** tout nombre

$$z = a + b i \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ deux réels.}$$

$a$  est la **partie réelle** du n<sup>b</sup> compl.  $z$

$b$  est la **partie imaginaire** du n<sup>b</sup> compl.  $z$

Lorsque la **partie imaginaire** est nulle alors  $z$  est

...

Lorsque la **partie réelle** est nulle alors  $z$  est dit ...

# chapitre 8 Les Nombres Complexes

## I Définition

Soit  $i$  le nombre **imaginaire** tel que  $i^2 = -1$

On appelle **nombre complexe** tout nombre

$$z = a + b i \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ deux réels.}$$

$a$  est la **partie réelle** du n<sup>b</sup> compl.  $z$

$b$  est la **partie imaginaire** du n<sup>b</sup> compl.  $z$

Lorsque la **partie imaginaire** est nulle alors  $z$  est *réel*.

Lorsque la **partie réelle** est nulle alors  $z$  est dit *imaginaire pur*.

# chapitre 8 Les Nombres Complexes

## I Définition

Soit  $i$  le nombre **imaginaire** tel que  $i^2 = -1$

On appelle **nombre complexe** tout nombre

$$z = a + b i \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ deux réels.}$$

$a$  est la **partie réelle** du n<sup>b</sup> compl.  $z$

$b$  est la **partie imaginaire** du n<sup>b</sup> compl.  $z$

$a + b i$  est appelée **forme algébrique** du n<sup>b</sup> compl.  $z$

# chapitre 8 Les Nombres Complexes

## I Définition

Soit  $i$  le nombre imaginaire tel que  $i^2 = -1$

On appelle nombre complexe tout nombre

$$z = a + b i \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ deux réels.}$$

$a$  est la partie réelle du n<sup>b</sup> compl.  $z$

$b$  est la partie imaginaire du n<sup>b</sup> compl.  $z$

$a + b i$  est appelée forme algébrique du n<sup>b</sup> compl.  $z$

Le conjugué de  $z$  noté  $\bar{z}$  est  $a - b i$

# chapitre 8 Les Nombres Complexes

## I Définition

Soit  $i$  le nombre **imaginaire** tel que  $i^2 = -1$

On appelle **nombre complexe** tout nombre

$$z = a + b i \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ deux réels.}$$

$a$  est la **partie réelle** du n<sup>b</sup> compl.  $z$

$b$  est la **partie imaginaire** du n<sup>b</sup> compl.  $z$

$a + b i$  est appelée **forme algébrique** du n<sup>b</sup> compl.  $z$

Le **conjugué** de  $z$  noté  $\bar{z}$  est  $a - b i$

L'ensemble des nombres complexes est noté  $\mathbb{C}$ .

## II Intérêt des nombres complexes

Ils permettent de simplifier la résolution  
de problèmes réels

d'électricité

d'optique

de géométrie etc...

bien que l'on utilise un nombre imaginaire.



### III Opérations sur les nombres complexes

Ce sont les mêmes opérations

que dans les réels avec en plus  $i^2 = -1$

Exemples : Exercice 1 :

Soient  $z = 2 - 3i$  et  $w = 1 + 2i$

Déterminez

|                   |                         |
|-------------------|-------------------------|
| $z_1 = z + w$     | $z_2 = w + \bar{w}$     |
| $z_3 = 3z$        | $z_4 = z - \bar{z}$     |
| $z_5 = z w$       | $z$                     |
| $z_6 = z \bar{z}$ | $z_7 = \frac{\quad}{w}$ |

Que remarquez-vous ? Démontrez les conjectures.

# Exercice 1 :

Soient  $z = 2 - 3i$  et  $w = 1 + 2i$

$$z_1 = z + w = 2 - 3i + 1 + 2i$$

## Exercice 1 :

Soient  $z = 2 - 3i$  et  $w = 1 + 2i$

$$z_1 = z + w = 2 - 3i + 1 + 2i = 2 + 1 - 3i + 2i = 3 - i$$

# Exercice 1 :

Soient  $z = 2 - 3i$  et  $w = 1 + 2i$

$$z_1 = z + w = 2 - 3i + 1 + 2i = 2 + 1 - 3i + 2i = 3 - i$$

$$z_2 = w + \overline{w} = (1 + 2i) + (1 - 2i)$$

# Exercice 1 :

Soient  $z = 2 - 3i$  et  $w = 1 + 2i$

$$z_1 = z + w = 2 - 3i + 1 + 2i = 2 + 1 - 3i + 2i = 3 - i$$

$$z_2 = w + \bar{w} = (1 + 2i) + (1 - 2i) = 2 \quad \text{réel}$$

# Exercice 1 :

Soient  $z = 2 - 3i$  et  $w = 1 + 2i$

$$z_1 = z + w = 2 - 3i + 1 + 2i = 2 + 1 - 3i + 2i = 3 - i$$

$$z_2 = w + \bar{w} = (1 + 2i) + (1 - 2i) = 2 \quad \text{réel}$$

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$$

$z + \bar{z}$  est toujours un réel.

# Exercice 1 :

Soient  $z = 2 - 3i$  et  $w = 1 + 2i$

$$z_1 = z + w = 2 - 3i + 1 + 2i = 2 + 1 - 3i + 2i = 3 - i$$

$$z_2 = w + \bar{w} = (1 + 2i) + (1 - 2i) = 2 \quad \text{réel}$$

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$$

$z + \bar{z}$  est toujours un réel.

$$z_3 = 3z = 3(2 - 3i)$$

# Exercice 1 :

Soient  $z = 2 - 3i$  et  $w = 1 + 2i$

$$z_1 = z + w = 2 - 3i + 1 + 2i = 2 + 1 - 3i + 2i = 3 - i$$

$$z_2 = w + \bar{w} = (1 + 2i) + (1 - 2i) = 2 \quad \text{réel}$$

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$$

$z + \bar{z}$  est toujours un réel.

$$z_3 = 3z = 3(2 - 3i) = 6 - 9i$$



## Exercice 1 :

Soient  $z = 2 - 3i$  et  $w = 1 + 2i$

$$z_4 = z - \bar{z} = (2 - 3i) - (2 + 3i)$$

## Exercice 1 :

Soient  $z = 2 - 3i$  et  $w = 1 + 2i$

$$z_4 = z - \bar{z} = (2 - 3i) - (2 + 3i) = -6i \text{ imaginaire pur}$$

# Exercice 1 :

Soient  $z = 2 - 3i$  et  $w = 1 + 2i$

$$z_4 = z - \bar{z} = (2 - 3i) - (2 + 3i) = -6i \text{ imaginaire pur}$$

$$z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi)$$

# Exercice 1 :

Soient  $z = 2 - 3i$  et  $w = 1 + 2i$

$$z_4 = z - \bar{z} = (2 - 3i) - (2 + 3i) = -6i \text{ imaginaire pur}$$

$$z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = a + bi - a + bi = 2bi$$

$z - \bar{z}$  est toujours un **imaginaire pur**.

# Exercice 1 :

Soient  $z = 2 - 3i$  et  $w = 1 + 2i$

$$z_4 = z - \bar{z} = (2 - 3i) - (2 + 3i) = -6i \text{ imaginaire pur}$$

$$z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = a + bi - a + bi = 2bi$$

$z - \bar{z}$  est toujours un **imaginaire pur**.

$$z_5 = z w = (2 - 3i) (1 + 2i)$$

## Exercice 1 :

Soient  $z = 2 - 3i$  et  $w = 1 + 2i$

$$z_4 = z - \bar{z} = (2 - 3i) - (2 + 3i) = -6i \text{ imaginaire pur}$$

$$z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = a + bi - a + bi = 2bi$$

$z - \bar{z}$  est toujours un **imaginaire pur**.

$$\begin{aligned} z_5 = z w &= (2 - 3i)(1 + 2i) = 2(1 + 2i) - 3i(1 + 2i) \\ &= 2 + 4i - 3i - 6i^2 \end{aligned}$$

# Exercice 1 :

Soient  $z = 2 - 3i$  et  $w = 1 + 2i$

$$z_4 = z - \bar{z} = (2 - 3i) - (2 + 3i) = -6i \text{ imaginaire pur}$$

$$z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = a + bi - a + bi = 2bi$$

$z - \bar{z}$  est toujours un **imaginaire pur**.

$$\begin{aligned} z_5 = z w &= (2 - 3i)(1 + 2i) = 2(1 + 2i) - 3i(1 + 2i) \\ &= 2 + 4i - 3i - 6i^2 = 2 + i - 6(-1) = 8 + i \end{aligned}$$

# Exercice 1 :

Soient  $z = 2 - 3i$  et  $w = 1 + 2i$

$$z_6 = z \bar{z} = (2 - 3i)(2 + 3i)$$



# Exercice 1 :

Soient  $z = 2 - 3i$  et  $w = 1 + 2i$

$$\begin{aligned} z_6 = z \bar{z} &= (2 - 3i)(2 + 3i) = 2(2 + 3i) - 3i(2 + 3i) \\ &= 4 + 6i - 6i - 9i^2 \end{aligned}$$

# Exercice 1 :

Soient  $z = 2 - 3i$  et  $w = 1 + 2i$

$$\begin{aligned} z_6 = z \bar{z} &= (2 - 3i)(2 + 3i) = 2(2 + 3i) - 3i(2 + 3i) \\ &= 4 + 6i - 6i - 9i^2 = 4 - 9(-1) = \mathbf{13} \text{ réel} \end{aligned}$$

## Exercice 1 :

Soient  $z = 2 - 3i$  et  $w = 1 + 2i$

$$\begin{aligned} z_6 = z \bar{z} &= (2 - 3i)(2 + 3i) = 2(2 + 3i) - 3i(2 + 3i) \\ &= 4 + 6i - 6i - 9i^2 = 4 - 9(-1) = \mathbf{13} \text{ réel} \end{aligned}$$

$$z \times \bar{z} = (a + bi)(a - bi)$$

# Exercice 1 :

Soient  $z = 2 - 3i$  et  $w = 1 + 2i$

$$\begin{aligned} z_6 = z \bar{z} &= (2 - 3i)(2 + 3i) = 2(2 + 3i) - 3i(2 + 3i) \\ &= 4 + 6i - 6i - 9i^2 = 4 - 9(-1) = \mathbf{13} \text{ réel} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z \times \bar{z} &= (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 \\ &= a^2 - b^2 i^2 \end{aligned}$$

# Exercice 1 :

Soient  $z = 2 - 3i$  et  $w = 1 + 2i$

$$\begin{aligned} z_6 = z \bar{z} &= (2 - 3i)(2 + 3i) = 2(2 + 3i) - 3i(2 + 3i) \\ &= 4 + 6i - 6i - 9i^2 = 4 - 9(-1) = \mathbf{13} \text{ réel} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z \times \bar{z} &= (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 \\ &= a^2 - b^2 i^2 = a^2 - b^2(-1) = \mathbf{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

$z \times \bar{z}$  est toujours un **réel positif**.

# Exercice 1 :

Soient  $z = 2 - 3i$  et  $w = 1 + 2i$

$$z \quad 2 - 3i$$

$$z_7 = \frac{z}{w} = \frac{2 - 3i}{1 + 2i}$$

On veut obtenir  $z_7 = a + bi$  avec  $a$  et  $b$  deux réels

Il faut donc faire disparaître ...

# Exercice 1 :

Soient  $z = 2 - 3i$  et  $w = 1 + 2i$

$$z_7 = \frac{z}{w} = \frac{2 - 3i}{1 + 2i} = \frac{(2 - 3i) \dots}{(1 + 2i) \dots}$$

On veut obtenir  $z_7 = a + bi$  avec  $a$  et  $b$  deux réels  
Il faut donc faire disparaître le  $i$  du dénominateur,  
par l'opération ...

# Exercice 1 :

Soient  $z = 2 - 3i$  et  $w = 1 + 2i$

$$z \qquad 2 - 3i \qquad (2 - 3i)^2$$

$$z_7 = \frac{z}{w} = \frac{2 - 3i}{1 + 2i} = \frac{(2 - 3i)^2}{(1 + 2i)^2} \quad \text{est faux}$$

$$w \qquad 1 + 2i \qquad (1 + 2i)^2 \quad \text{car } z_7^2 \neq z_7$$

$$\text{et } (1 + 2i)^2 = 1^2 + 2 \times 1 \times 2i + (2i)^2 = 1 + 4i + 4(-1)$$

On veut obtenir  $z_7 = a + bi$  avec  $a$  et  $b$  deux réels

Il faut donc faire disparaître le  $i$  du dénominateur,  
par l'opération ...



# Exercice 1 :

Soient  $z = 2 - 3i$  et  $w = 1 + 2i$

$$z_7 = \frac{z}{w} = \frac{2 - 3i}{1 + 2i} = \frac{(2 - 3i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)}$$

identité remarquable n° 3 :

$$(1 + 2i)(1 - 2i) = 1^2 - (2i)^2 = 1 - 4i^2 = 1 - 4(-1) = 5$$

car  $w \times \bar{w}$  est le réel positif  $a^2 + b^2$  ( voir  $z_6$  )

Il reste à obtenir  $z_7 = \dots + \dots i$  en simplifiant le numérateur, puis en le divisant par le dénominateur.

# Exercice 1 :

Soient  $z = 2 - 3i$  et  $w = 1 + 2i$

$$z_7 = \frac{z}{w} = \frac{2 - 3i}{1 + 2i} = \frac{(2 - 3i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)}$$

identité remarquable n° 3 :

$$(1 + 2i)(1 - 2i) = 1^2 - (2i)^2 = 1 - 4i^2 = 1 - 4(-1) = 5$$

$$z_7 = \frac{(2 - 3i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{2 - 3i - 4i + 6(i^2)}{5}$$

# Exercice 1 :

Soient  $z = 2 - 3i$  et  $w = 1 + 2i$

$$z_7 = \frac{z}{w} = \frac{2 - 3i}{1 + 2i} = \frac{(2 - 3i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)}$$

identité remarquable n° 3 :

$$(1 + 2i)(1 - 2i) = 1^2 - (2i)^2 = 1 - 4i^2 = 1 - 4(-1) = 5$$

$$z_7 = \frac{(2 - 3i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{2 - 3i - 4i + 6(-1)}{5}$$

# Exercice 1 :

Soient  $z = 2 - 3i$  et  $w = 1 + 2i$

$$z_7 = \frac{z}{w} = \frac{2 - 3i}{1 + 2i} = \frac{(2 - 3i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)}$$

identité remarquable n° 3 :

$$(1 + 2i)(1 - 2i) = 1^2 - (2i)^2 = 1 - 4i^2 = 1 - 4(-1) = 5$$

$$z_7 = \frac{(2 - 3i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{-4 - 7i}{5} = -0,8 - 1,4i$$