Chapitre 6

I Suites arithmétiques

Soient les suites définies par :

$u_{n+1} = u_n + 2$ et $u_0 = 1$

$v_{n+1} = v_n$ et $v_0 = 1$

$w_{n+1} = w_n - 3$ et $w_0 = 1$

Tracez leurs courbes sur le même graphe
(les 5 premiers points). Que remarquez-vous ?

$u_{n+1} = u_n + 2$ et $u_0 = 1$

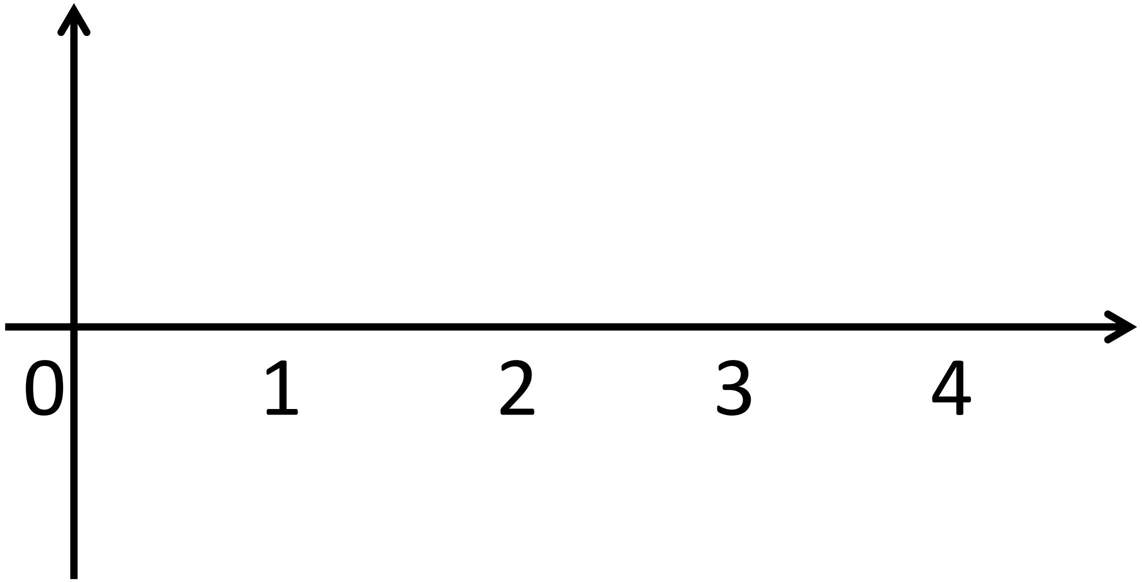
$v_{n+1} = v_n$ et $v_0 = 1$

$w_{n+1} = w_n - 3$ et $w_0 = 1$

Tracez leurs courbes sur le même graphe

(les 5 premiers points). Que remarquez-vous ?

n	0	1	2	3	4
u_n					
v_n					
w_n					



Chapitre 6

I Suites arithmétiques

$u_0 = 1$ $u_1 = u_0 + 2 = 3$ $u_2 = u_1 + 2 = 5$ etc…

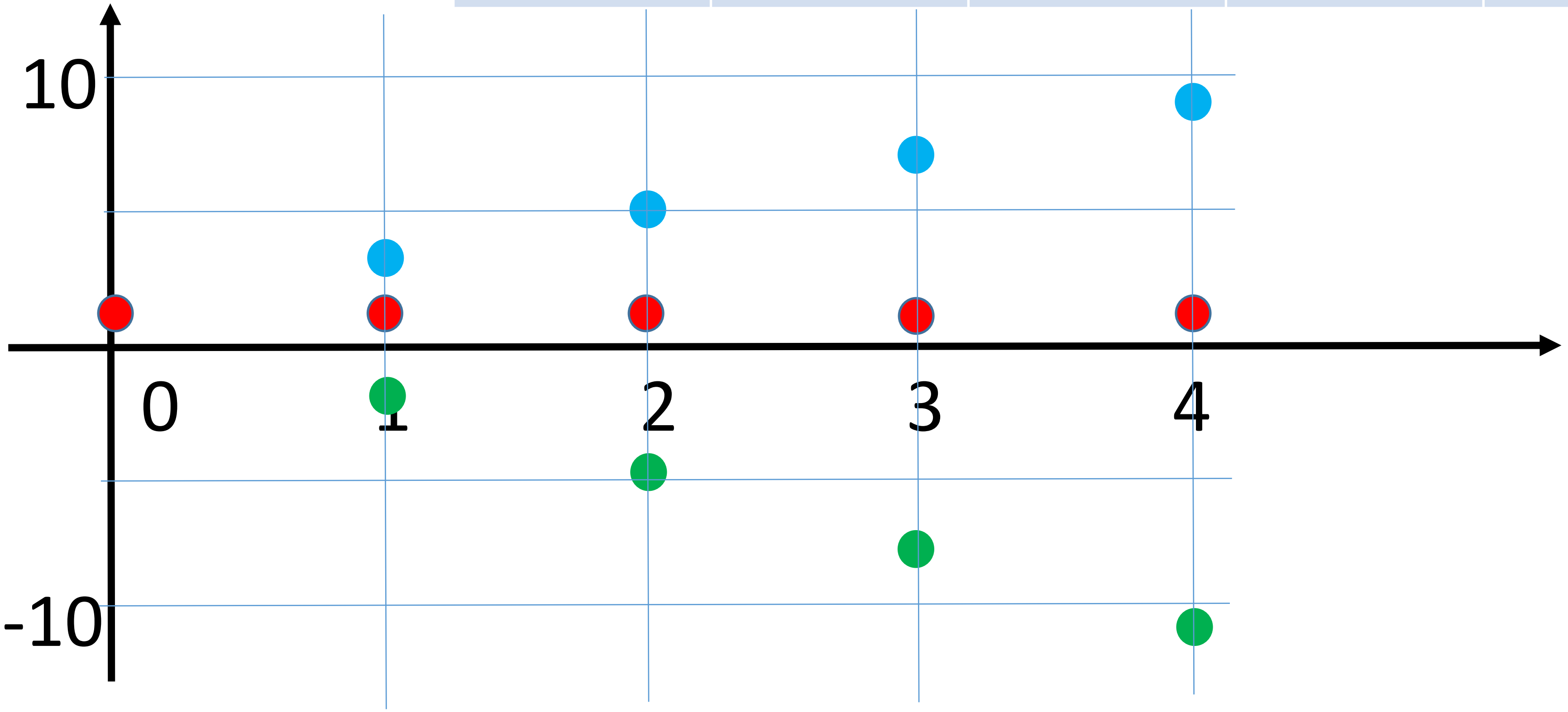
$v_0 = 1$ $v_1 = v_0 = 1$ $v_2 = v_1 = 1$ etc…

$w_0 = 1$ $w_1 = w_0 - 3 = -2$ $w_2 = w_1 - 3 = -5$ etc…

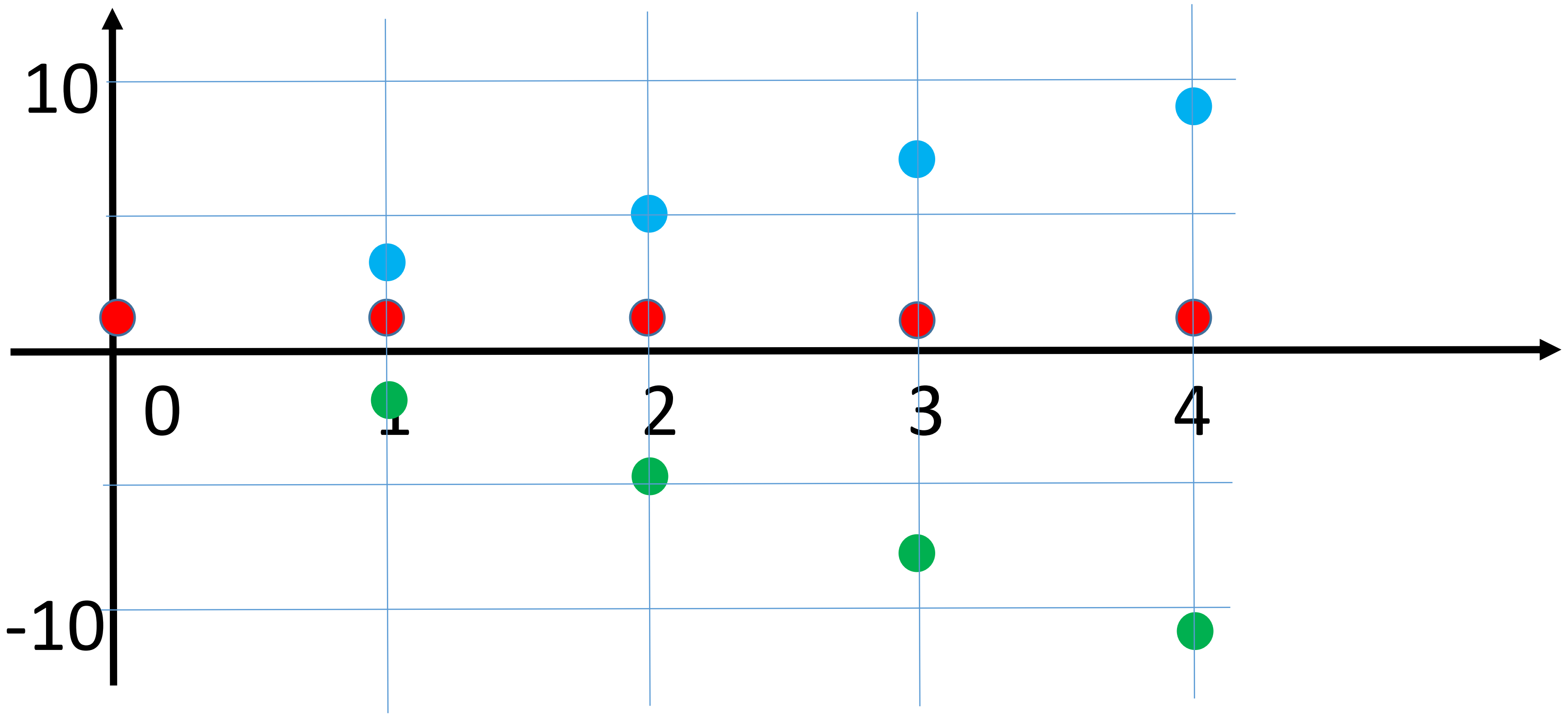
n	0	1	2	3	4
u_n	1	3	5	7	9
v_n	1	1	1	1	1
w_n	1	- 2	- 5	- 8	- 11

Tracez leurs courbes sur le même graphe

n	0	1	2	3	4
u_n	1	3	5	7	9
v_n	1	1	1	1	1
w_n	1	- 2	- 5	- 8	- 11

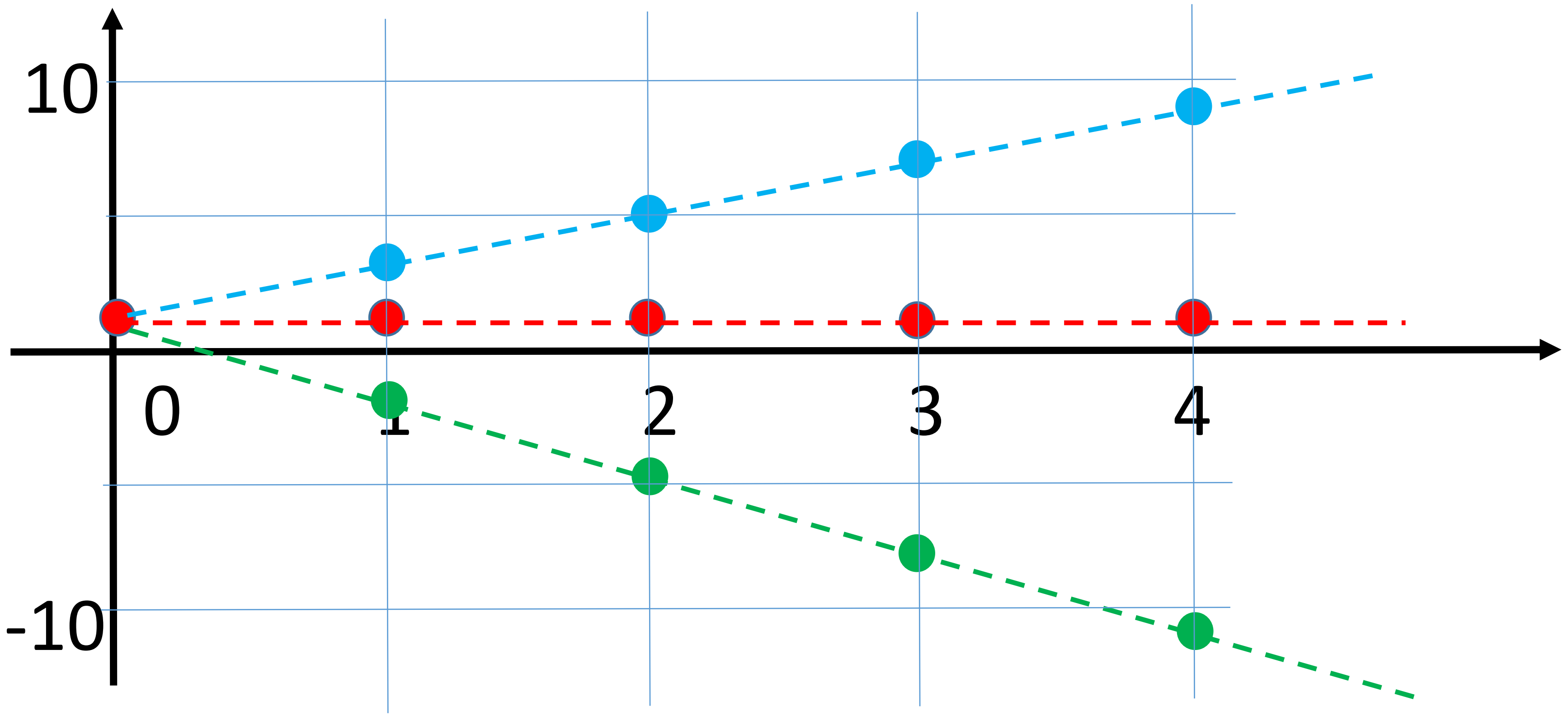


Que remarquez-vous ?



Que remarquez-vous ?

Les points semblent tous alignés.

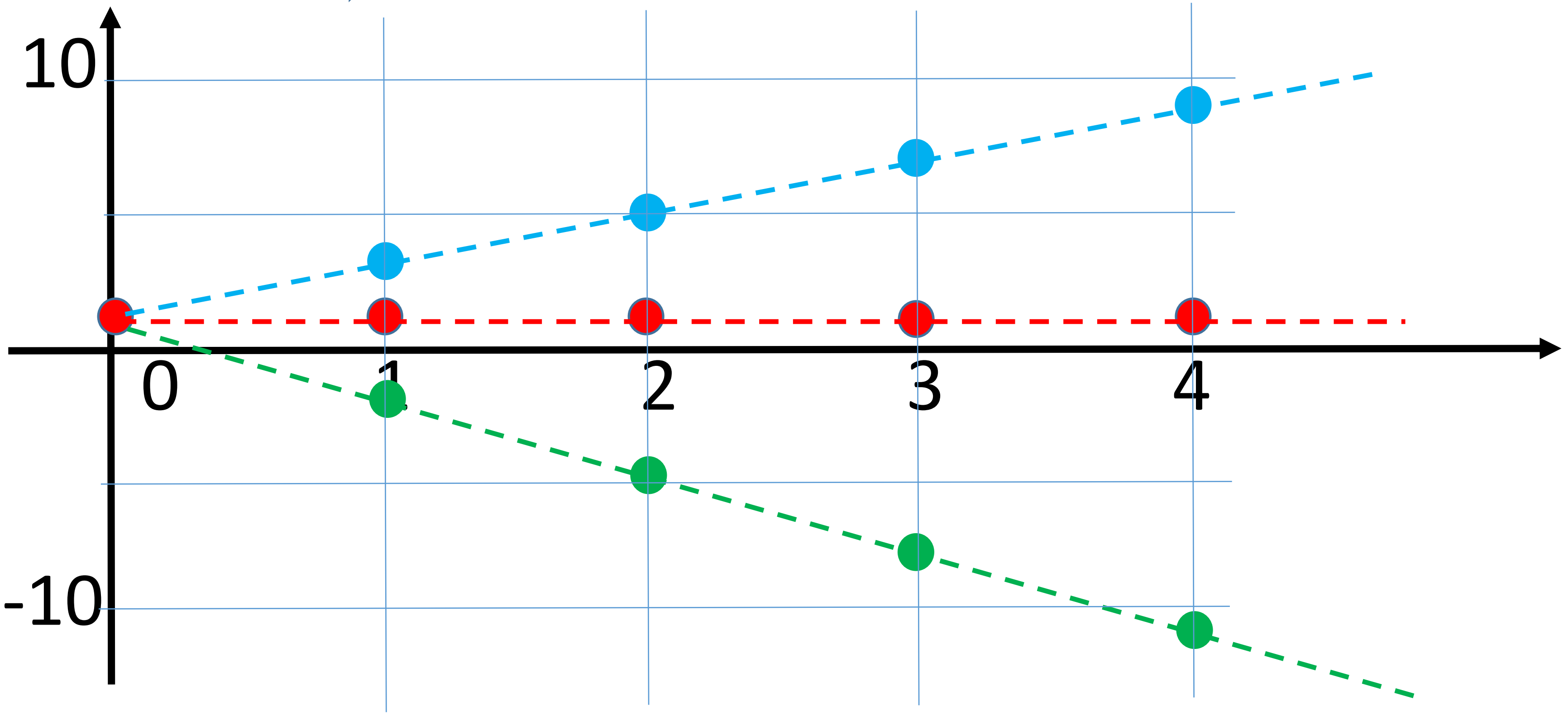


Que remarquez-vous ?

Les points semblent tous alignés.

$u_{n+1} = u_n + 2$ la suite semble croissante.

$v_{n+1} = v_n + 0$ ⇒ constante. $w_{n+1} = w_n - 3$ ⇒ décroissante.



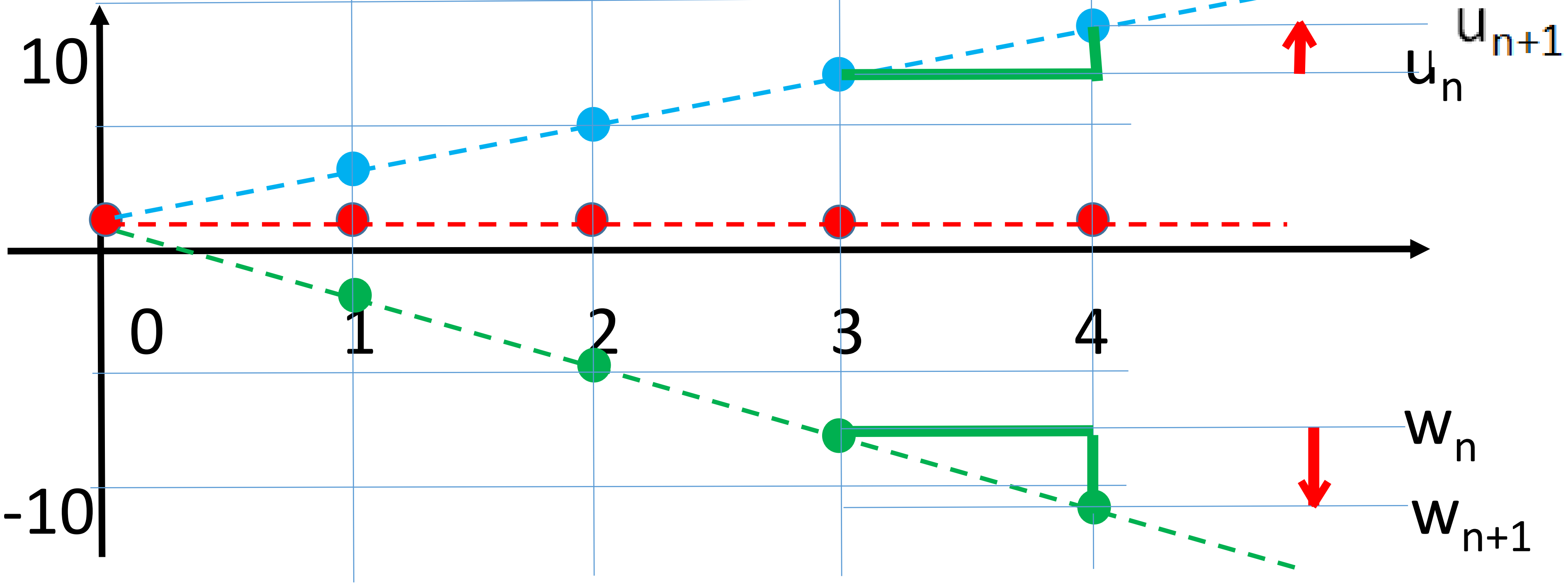
Que remarquez-vous ?

Les points semblent tous alignés.

$u_{n+1} = u_n + 2$ la suite semble croissante. coeff.directeur = + 2

$v_{n+1} = v_n + 0$ ➡ constante. $w_{n+1} = w_n - 3$ ➡ décroissante.

coeff.directeur = 0 coeff.directeur = - 3



Chapitre 6

I Suites arithmétiques :

1°) Définition :

La suite (u_n) est arithmétique

si et seulement si l'écart entre tous les termes voisins est constant

$\boxed{u_{n+1} - u_n = C^{te}}$ pour tous les n de l'ensemble de définition ($\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$).

Chapitre 6

I Suites arithmétiques :

1°) Définition :

La suite (u_n) est arithmétique

si et seulement si l'écart entre tous les termes voisins est constant

$\boxed{u_{n+1} - u_n = C^{te}}$ pour tous les n de l'ensemble de définition ($\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$).

Exemple : 10   13   16   19   22   25   28

Chapitre 6

I Suites arithmétiques :

1°) Définition :

La suite (u_n) est arithmétique

si et seulement si l'écart entre tous les termes voisins est constant

$\boxed{u_{n+1} - u_n = C^{te}}$ pour tous les n de l'ensemble de définition ($\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$).

Exemple : 10 13 16 19 22 25 28 écart constant de 3

Cet écart constant est appelé « Raison de la suite arithmétique ».

Chapitre 6

I Suites arithmétiques :

1°) Définition :

La suite (u_n) est arithmétique

si et seulement si l'écart entre tous les termes voisins est constant

$\boxed{u_{n+1} - u_n = C^{te}}$ pour tous les n de l'ensemble de définition ($\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$).

Exemple : 10 13 16 19 22 25 28 écart constant de 3

Cet écart constant est appelé « Raison de la suite arithmétique ».

Ne pas confondre : 10 20 40 80 rapport constant pour les suites géométriques !

2°) Conséquences :

$u_{n+1} - u_n = C^{te}$ donc $u_{n+1} = u_n + r$

2°) Conséquences :

$u_{n+1} - u_n = C^{te} = r$ donc $u_{n+1} = u_n + r$

$u_n - u_0 = \dots$

2°) Conséquences :

$u_{n+1} - u_n = C^{te} = r \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + r$

$u_n - u_0 = \ldots$

$n = 1 \Rightarrow u_n - u_0 = \ldots$

$n = 2 \Rightarrow u_n - u_0 = \ldots$

$n = 3 \Rightarrow u_n - u_0 = \ldots$

Généralisation : $u_n - u_0 = \ldots$

$u_{n+1} - u_n = C^{te} = r \Longleftrightarrow u_{n+1} = u_n + r$

$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad$ etc… $\quad u_{n-1} \quad u_n$

$u_n - u_0 = \ldots$

$n = 1 \Rightarrow u_n - u_0 = \ldots$

$n = 2 \Rightarrow u_n - u_0 = \ldots$

$n = 3 \Rightarrow u_n - u_0 = \ldots$

Généralisation : $\quad u_n - u_0 = \ldots$

$u_{n+1} - u_n = C^{te} = r \iff u_{n+1} = u_n + r$

$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3$ etc… $u_{n-1} \quad u_n$

raison r

$u_n - u_0 = \ldots$

$n = 1 \Rightarrow u_n - u_0 = \ldots$

$n = 2 \Rightarrow u_n - u_0 = \ldots$

$n = 3 \Rightarrow u_n - u_0 = \ldots$

Généralisation : $u_n - u_0 = \ldots$

$u_{n+1} - u_n = C^{te} = r \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + r$

$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad$ etc… $\quad u_{n-1} \quad u_n$

raison r

$u_n - u_0 = \dots$

$n = 1 \Rightarrow u_n - u_0 = r$

$n = 2 \Rightarrow u_n - u_0 = \dots$

$n = 3 \Rightarrow u_n - u_0 = \dots$

Généralisation :

$$\boxed{u_n - u_0 = \dots}$$

$$u_{n+1} - u_n = C^{te} = r \Longleftrightarrow u_{n+1} = u_n + r$$

u_0 u_1 u_2 u_3 etc… u_{n-1} u_n

raison r

$u_n - u_0 = \ldots$

$n = 1 \Rightarrow u_n - u_0 = r$

$n = 2 \Rightarrow u_n - u_0 = 2r$

$n = 3 \Rightarrow u_n - u_0 = \ldots$

Généralisation :

$$\boxed{u_n - u_0 = \ldots}$$

$u_{n+1} - u_n = C^{te} = r \iff u_{n+1} = u_n + r$

$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad$ etc... $\quad u_{n-1} \quad u_n$

raison r

$u_n - u_0 = \ldots$

$n = 1 \Rightarrow u_n - u_0 = r$

$n = 2 \Rightarrow u_n - u_0 = 2r$

$n = 3 \Rightarrow u_n - u_0 = 3r$

Généralisation :

$\boxed{u_n - u_0 = \ldots}$

$$u_{n+1} - u_n = C^{te} = r \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + r$$

$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3$ etc... $u_{n-1} \quad u_n$

raison r ...

$u_n - u_0 = \ldots$

$n = 1 \Rightarrow u_n - u_0 = r$

$n = 2 \Rightarrow u_n - u_0 = 2r$

$n = 3 \Rightarrow u_n - u_0 = 3r$

Généralisation : $\boxed{u_n - u_0 = nr}$

$$u_{n+1} - u_n = C^{te} = r \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + r$$

$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3$ etc… $u_{n-1} \quad u_n$

raison r

$$u_n - u_0 = nr$$

$$n = 2 \Rightarrow u_n - u_1 = \dots$$

$$n = 3 \Rightarrow u_n - u_1 = \dots$$

Généralisation :

$$\boxed{u_n - u_1 = \dots}$$

$$u_n - u_m = \dots ?$$

$u_{n+1} - u_n = C^{te} = r \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + r$

u_0 u_1 u_2 u_3 etc… u_{n-1} u_n

raison r

$u_n - u_0 = nr$

$n = 2 \Rightarrow u_n - u_1 = r$

$n = 3 \Rightarrow u_n - u_1 = \ldots$

Généralisation :

$\boxed{u_n - u_1 = \ldots}$

$u_n - u_m = \ldots$?

$u_{n+1} - u_n = C^{te} = r \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + r$

$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad$ etc… $\quad u_{n-1} \quad u_n$

raison r

$u_n - u_0 = nr$

$n = 2 \Rightarrow u_n - u_1 = r$

$n = 3 \Rightarrow u_n - u_1 = 2r$

Généralisation :

$\boxed{u_n - u_1 = \ldots}$

$u_n - u_m = \ldots$?

$$u_{n+1} - u_n = C^{te} = r \Longleftrightarrow u_{n+1} = u_n + r$$

$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad$ etc… $\quad u_{n-1} \quad u_n$

raison r …

$$u_n - u_0 = nr$$

$n = 2 \Rightarrow u_n - u_1 = r$

$n = 3 \Rightarrow u_n - u_1 = 2r$

Généralisation :

$$\boxed{u_n - u_1 = (n-1)r}$$

$$u_n - u_m = \ldots ?$$

$$u_{n+1} - u_n = C^{te} = r \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + r$$

$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad$ etc… $\quad u_{n-1} \quad u_n$

raison r …

$$u_n - u_0 = nr$$

$$n = 2 \Rightarrow u_n - u_1 = r$$

$$n = 3 \Rightarrow u_n - u_1 = 2r$$

Généralisation :

$$\boxed{u_n - u_1 = (n - 1)r}$$

$$\boxed{u_n - u_m = (n - m)r}$$

$u_n - u_m = (n - m)\,r$

Application :

Toutes les suites sont arithmétiques.

Exo 1 : $u_2 = 8$ $u_{10} = 32$ $r = ?$

Exo 2 : $u_3 = 14$ $u_{12} = 59$ $u_{22} = ?$

Exo 3 : $u_4 = 19$ $u_{20} = 99$ $u_n = f(n) = ?$

Exo 4 : $u_5 = 10$ $u_{11} = -2$ $u_N = 16$ $N = ?$

$u_n - u_m = (n - m) r$

Exo 1 : $u_2 = 8 \qquad u_{10} = 32 \qquad r = ?$

$u_n - u_m = (n - m) r$

devient

$u_{10} - u_2 = (10 - 2) r \Leftrightarrow 32 - 8 = (10 - 2) r$

$$\Leftrightarrow r = \frac{32 - 8}{10 - 2} = \frac{24}{8} = \mathbf{3}$$

$u_n - u_m = (n - m) r$

Application :

Toutes les suites sont arithmétiques.

Exo 2 : $u_3 = 14$ $u_{12} = 59$ $u_{22} = ?$

Exo 3 : $u_4 = 19$ $u_{20} = 99$ $u_n = f(n) = ?$

Exo 4 : $u_5 = 10$ $u_{11} = -2$ $u_N = 16$ $N = ?$

Exo 2 : $u_3 = 14$ $u_{12} = 59$ $u_{22} = ?$

1ère partie (idem exo 1) : déterminer r

$u_n - u_m = (n - m) r$

devient $u_3 - u_{12} = (3 - 12) r$

$\Leftrightarrow 14 - 59 = (3 - 12) r$

$$\Leftrightarrow r = \frac{14 - 59}{3 - 12} = \frac{-45}{-9} = \mathbf{5}$$

Exo 2 : $u_{12} = 59$ $r = 5$ $u_{22} = ?$

$2^{ème}$ partie :

$u_n - u_m = (n - m)\, r$

devient $u_{22} - u_{12} = (22 - 12)\, r$

$\Leftrightarrow u_{22} - 59 = (22 - 12)\, 5$

$\Leftrightarrow \mathbf{u_{22}} = 59 + (22 - 12)\, 5$

$= 59 + 50$

$= \mathbf{109}$

$$u_n - u_m = (n - m) r$$

Application :

Toutes les suites sont arithmétiques.

Exo 3 : $u_4 = 19$ $u_{20} = 99$ $u_n = f(n) = ?$

Exo 4 : $u_5 = 10$ $u_{11} = -2$ $u_N = 16$ $N = ?$

Exo 3 : $u_4 = 19$ $u_{20} = 99$ $u_n = f(n) = ?$

$1^{ère}$ partie (idem exo 1) : déterminer r

$u_n - u_m = (n - m)\, r$

devient $u_4 - u_{20} = (4 - 20)\, r$

$\Leftrightarrow 19 - 99 = (4 - 20)\, r$

$$\Leftrightarrow r = \frac{19 - 99}{4 - 20} = \frac{-80}{-16} = \mathbf{5}$$

Exo 3 : $u_{20} = 99$ $r = 5$ $u_n = f(n) = ?$

2ème partie :

$$u_n - u_m = (n - m)\, r$$

devient $u_n - u_{20} = (n - 20)\, r$

$$\Leftrightarrow \quad u_n - 99 = (n - 20)\, 5$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{u_n} = 99 + (n - 20)\, 5$$

$$= 99 + 5n - 100$$

$$= \mathbf{5n - 1}$$

$u_n - u_m = (n - m)\, r$

Application :

Toutes les suites sont arithmétiques.

Exo 4 : $u_5 = 10$ $u_{11} = -2$ $u_N = 16$ $N = ?$

Exo 4 : $u_5 = 10 \quad u_{11} = -2 \quad u_n = 16 \quad n = ?$

1ère partie (idem exo 1) : déterminer r

$u_n - u_m = (n - m)\, r$

devient $u_{11} - u_5 = (11 - 5)\, r$

$\Leftrightarrow (-2) - 10 = (11 - 5)\, r$

$$\Leftrightarrow r = \frac{(-2) - 10}{11 - 5} = \frac{-12}{6} = \mathbf{-2}$$

Exo 4 : $u_{11} = -2 \quad r = -2 \quad u_N = 16 \quad N = ?$

2ème partie :

$$u_n - u_m = (n - m)\, r$$

devient $u_N - u_{11} = (N - 11)\, r$

$$\Leftrightarrow \quad 16 - (-2) = (N - 11)(-2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 18 = -2N + 22$$

$$\Leftrightarrow \quad 2N = 22 - 18 = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{N} = 4/2 = \mathbf{2}$$

Réponse : $u_2 = 16$

2°) Conséquences :

$u_{n+1} - u_n = C^{te} = r$ donc $u_{n+1} = u_n + r$

$u_n - u_0 = (n - 0)\, r$ donc $\boxed{u_n = u_0 + n\, r}$

qui correspond avec les notations de fonctions à …

2°) Conséquences :

$u_{n+1} - u_n = C^{te} = r$ donc $u_{n+1} = u_n + r$

$u_n - u_0 = (n - 0) r$ donc $\boxed{u_n = u_0 + n\, r}$

qui correspond avec les notations de fonctions

à $f(x) = f(0) + x\, r$

donc à une fonction f …

2°) Conséquences :

$u_{n+1} - u_n = C^{te} = r$ donc $u_{n+1} = u_n + r$

$u_n - u_0 = (n - 0) r$ donc $\boxed{u_n = u_0 + n r}$

qui correspond avec les notations de fonctions

à $f(x) = f(0) + x r$

donc à une fonction f affine $f(x) = a x + b$

avec $a = \ldots$

2°) Conséquences :

$u_{n+1} - u_n = C^{te} = r$ donc $u_{n+1} = u_n + r$

$u_n - u_0 = (n - 0) r$ donc $\boxed{u_n = u_0 + n r}$

qui correspond avec les notations de fonctions

à $f(x) = f(0) + x r$

donc à une fonction f affine $f(x) = a x + b$

avec a = coeff. directeur = r et $b = f(0)$

donc lorsque $r < 0$ on sait que …

2°) Conséquences :

$u_{n+1} - u_n = C^{te} = r$ donc $u_{n+1} = u_n + r$

$u_n - u_0 = (n - 0)\, r$ donc $\boxed{u_n = u_0 + n\, r}$

qui correspond avec les notations de fonctions

à $f(x) = f(0) + x\, r$

donc à une fonction f affine $f(x) = a\, x + b$

avec a = coeff. directeur = r et $b = f(0)$

donc lorsque $r < 0$ on sait que la fonction affine est strictement décroissante, donc que la suite est aussi strictement décroissante.

2°) Conséquences :

$u_{n+1} - u_n = C^{te} = r$ donc $u_{n+1} = u_n + r$

$u_n - u_0 = (n - 0) r$ donc $\boxed{u_n = u_0 + n\,r}$

qui correspond avec les notations de fonctions

à $f(x) = f(0) + x\,r$

donc à une fonction f affine $f(x) = a\,x + b$

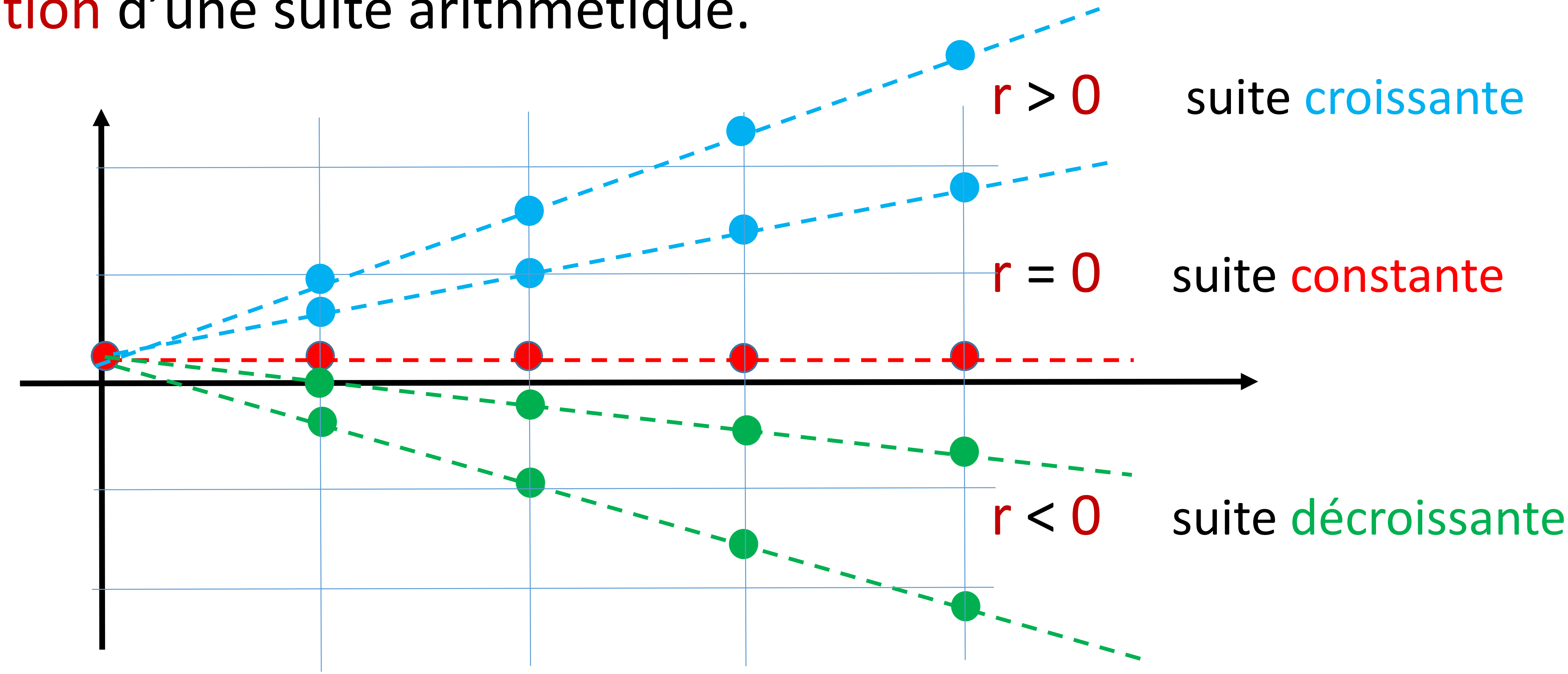
avec a = coeff. directeur r et $b = f(0)$

donc lorsque $r < 0$ on sait que la fonction affine est strictement décroissante, donc que la suite est aussi strictement décroissante.

(et si $r = 0$ la suite est constante, et si $r > 0$ la suite est croissante)

2°) Conséquences :

Il suffit de connaître le signe de la raison pour démontrer le sens de variation d'une suite arithmétique.



Application :

Soient les suites (déjà étudiées) définies par :

$u_{n+1} = u_n + 2$ et $u_0 = 1$

$v_{n+1} = v_n$ et $v_0 = 1$

$w_{n+1} = w_n - 3$ et $w_0 = 1$

2°) Sont-elles arithmétiques ?

3°) Déterminez leurs sens de variations.

4°) Déterminez leurs $100^{\text{ème}}$ termes.

5°) Déterminez leurs relations explicites.

Application :

Soient les suites (déjà étudiées) définies par :

$u_{n+1} = u_n + 2$ et $u_0 = 1$

$v_{n+1} = v_n$ et $v_0 = 1$

$w_{n+1} = w_n - 3$ et $w_0 = 1$

2°) Sont-elles arithmétiques ?

3°) Déterminez leurs sens de variations.

Soient les suites définies par :

$u_{n+1} = u_n + 2$ et $u_0 = 1$

$v_{n+1} = v_n$ et $v_0 = 1$

$w_{n+1} = w_n - 3$ et $w_0 = 1$

2°) Sont-elles arithmétiques ?

$u_{n+1} = u_n + 2 \iff u_{n+1} - u_n = 2 = C^{te}$ Oui

$v_{n+1} = v_n \iff v_{n+1} - v_n = 0 = C^{te}$ Oui

$w_{n+1} = w_n - 3 \iff w_{n+1} - w_n = -3 = C^{te}$ Oui

2°) Sont-elles arithmétiques ?

$u_{n+1} = u_n + 2 \iff u_{n+1} - u_n = C^{te} = 2$ Oui

$v_{n+1} = v_n \iff v_{n+1} - v_n = C^{te} = 0$ Oui

$w_{n+1} = w_n - 3 \iff w_{n+1} - w_n = C^{te} = -3$ Oui

3°) Déterminez leurs sens de variations.

$u_{n+1} - u_n = 2$ = raison > 0 $\iff$ suite croissante

$v_{n+1} - v_n = 0$ = raison = 0 $\iff$ suite constante

$w_{n+1} - w_n = -3$ = raison < 0 $\iff$ suite décroissante

3°) Déterminez leurs sens de variations.

$u_{n+1} - u_n = 2$ = raison > 0 $\Longleftrightarrow$ suite croissante

$v_{n+1} - v_n = 0$ = raison $= 0$ $\Longleftrightarrow$ suite constante

$w_{n+1} - w_n = -3$ = raison < 0 $\Longleftrightarrow$ suite décroissante

4°) Déterminez leurs 100ème termes.

$u_0 = 1$ $\quad$ $v_0 = 1$ $\quad$ $w_0 = 1$

5°) Déterminez leurs relations explicites.

3°) Déterminez leurs sens de variations.

$u_{n+1} - u_n = 2 = \text{raison} > 0 \Longleftrightarrow$ suite croissante

4°) Déterminez leurs 100ème termes.

$u_{n+1} - u_n = 2 = r \Rightarrow u_n - u_0 = (n - 0)\, r$

$\Rightarrow u_n = u_0 + nr$ u_0 est le 1er terme

$\Rightarrow$ 100ème terme $= u_{99} = u_0 + 99r = 1 + 99 \times 2 = 199$

5°) Déterminez leurs relations explicites.

$u_n = u_0 + nr$ d'après la question 4° $\Rightarrow u_n = 1 + 2n$

4°) Déterminez leurs 100ème termes.

$u_{n+1} - u_n = 2 = r \Rightarrow u_n - u_0 = (n - 0)\ r$

$\Rightarrow u_n = u_0 + nr$ $\qquad$ u_0 est le 1er terme

$\Rightarrow$ 100ème terme $= u_{99} = u_0 + 99r = 1 + 99\times2 = 199$

5°) Déterminez leurs relations explicites.

$u_n = u_0 + nr$ d'après la question 4° $\Rightarrow u_n = 1 + 2n$

Même méthode : $v_n = v_0 + nr = 1 + 0n = 1$

$w_n = w_0 + nr = 1 - 3n$

$v_{99} = v_0 = 1$ $\qquad$ $w_{99} = w_0 + 99r = 1 + 99\times(-\ 3) = -\ 296$