chapitre 4 (TC) **La dérivation**

I Taux de variation

1°) Définition :

Soient f une fonction définie sur un intervalle D_f , et x_1 et x_2 deux réels de D_f .

Taux de variation de f entre x_1 et x_2

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

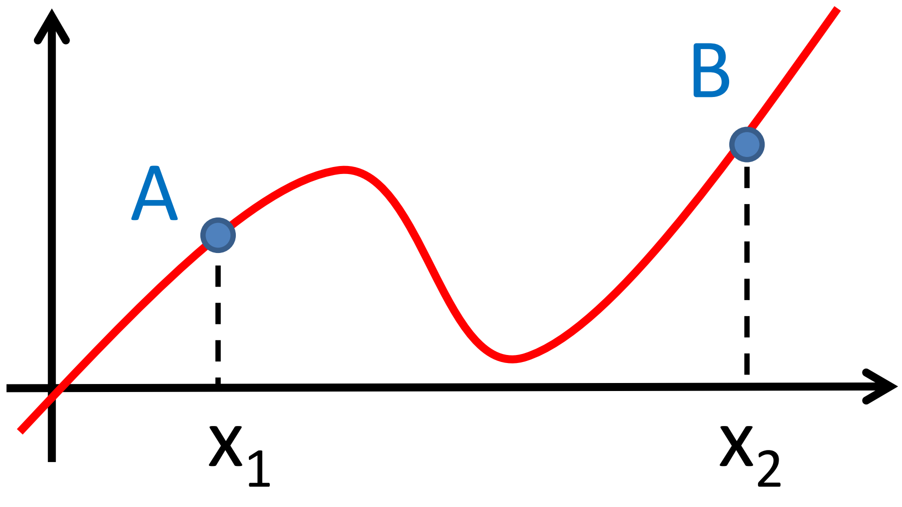
1°) Définition :

Taux de variation de f entre x_1 et x_2

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

2°) Conséquences :

$T = \ldots$

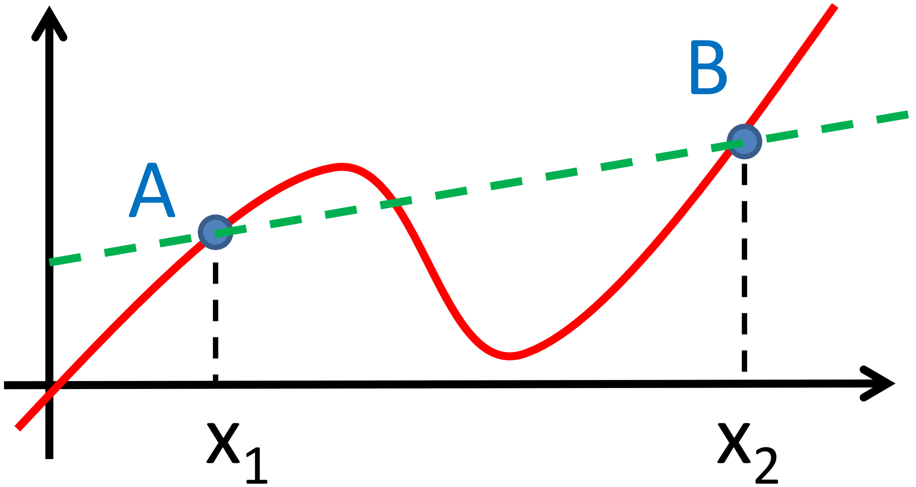


1°) Définition :

Taux de variation de f entre x_1 et x_2

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

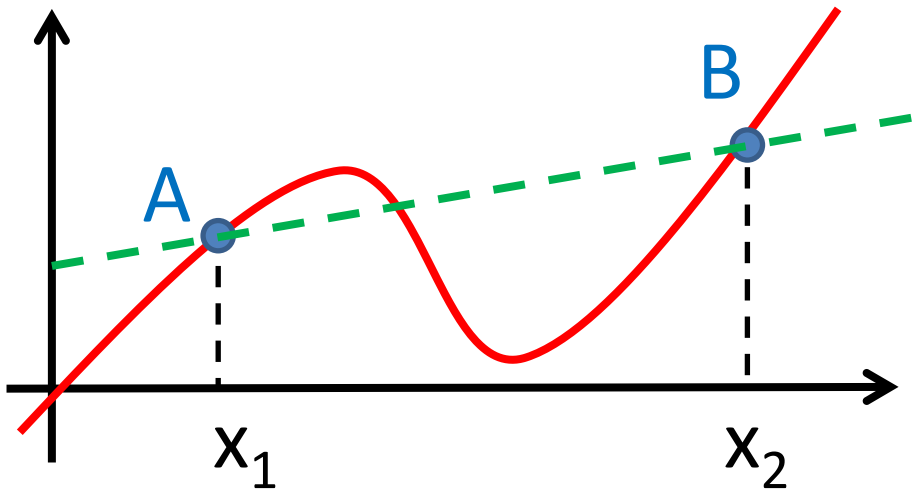
2°) Conséquences :



T = coeff. directeur de la droite (AB)

1°) Définition : Taux de variation de f entre x_1 et x_2

$$\boxed{T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}}$$



2°) Conséquences :

T = coeff. directeur de la droite (AB)

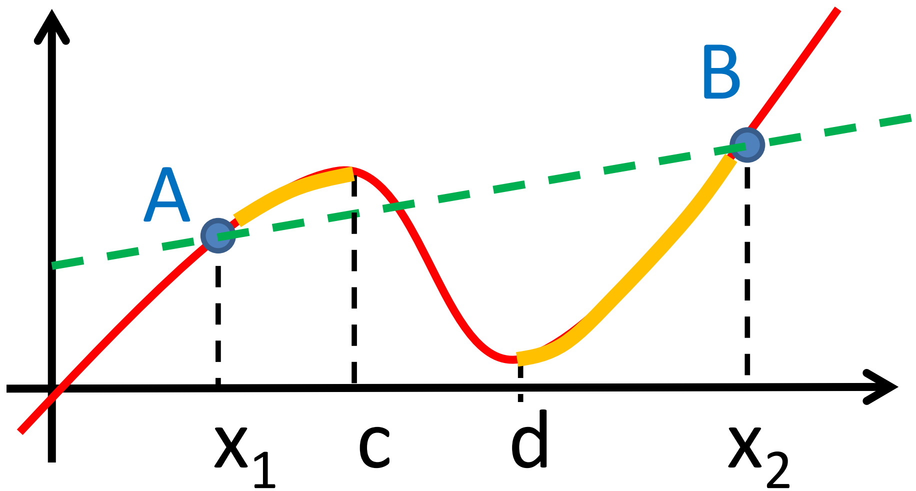
Affirmations Vraies ou Fausses ?

$T > 0 \overset{?}{\Longleftrightarrow}$ f est str. croissante sur $[\, x_1 \,;\, x_2 \,]$

$T < 0 \overset{?}{\Longleftrightarrow}$ f str. décroissante sur $[\, x_1 \,;\, x_2 \,]$

1°) <u>Définition</u> : Taux de variation de f entre x_1 et x_2

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$



2°) <u>Conséquences</u> :

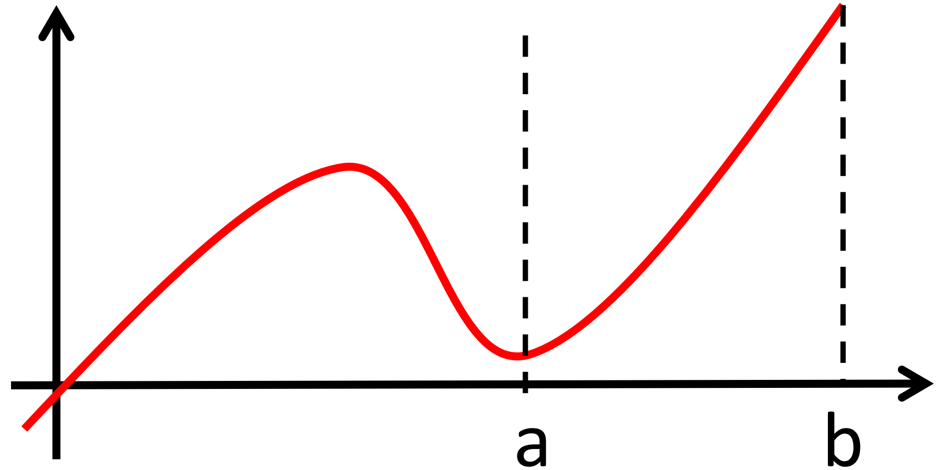
T = coeff. directeur de la droite (AB)

Affirmation Fausse !

T > 0 mais f est str. croissante sur [x_1 ; c] et sur [d ; x_2], et str. décroissante sur [c ; d].

1°) Définition : Taux de variation de f entre x_1 et x_2

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$



2°) Conséquences :

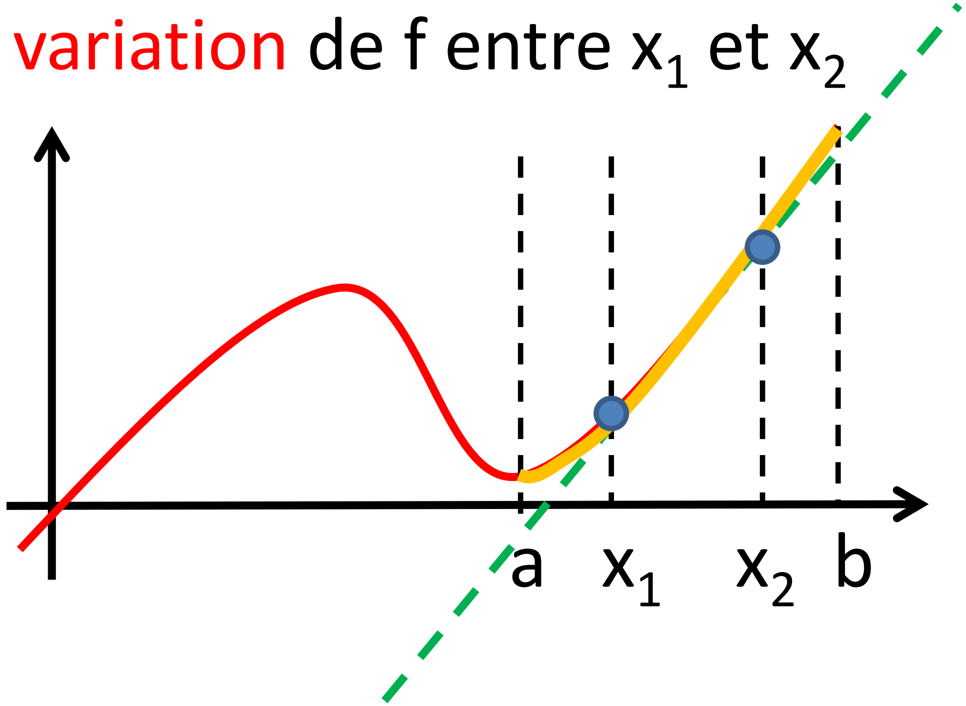
Complétez l'affirmation pour qu'elle soit Vraie :

$T > 0$ ...

$\Longleftrightarrow$ f est str. croissante sur [a ; b]

1°) <u>Définition</u> : Taux de variation de f entre x_1 et x_2

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$



2°) <u>Conséquences</u> :

T > 0 pour tous les x_1 et x_2 de [a ; b]

$\Longleftrightarrow$ f est str. croissante sur [a ; b]

Application 1 :

Soit la fonction f

définie sur D_f =] - 32 ; + 7 [

par f(x) = $2x^2 - 4$

Déterminez le taux de variation de f entre - 3 et 2.

Application 1 :

Soit la fonction f

définie sur $D_f =] - 32 ; + 7 [$

par $f(x) = 2x^2 - 4$

Déterminez le taux de variation de f entre - 3 et 2.

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(-3) - f(2)}{(-3) - 2}$$

Application 1 :

$f(x) = 2x^2 - 4$ sur $D_f =]-32 ; +7[$

Déterminez le taux de variation de f entre - 3 et 2.

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(-3) - f(2)}{-3 - 2}$$

$f(-3) = 2(-3)^2 - 4 = 18 - 4 = 14$

$f(2) = 2(2^2) - 4 = 8 - 4 = 4$

Application 1 :

$f(x) = 2x^2 - 4$ sur $D_f =]-32\,;+7[$

Déterminez le taux de variation de f entre - 3 et 2.

$f(-3) = 2(-3)^2 - 4 = 18 - 4 = 14$

$f(2) = 2(2^2) - 4 = 8 - 4 = 4$

$$T = \frac{f(-3) - f(2)}{-3 - 2} = \frac{14 - 4}{-3 - 2} = \frac{10}{-5} = -2$$

Application 2 :

$f(x) = 1/x$ sur $D_f =]\,0\,;+\infty\,[$

Déterminez le taux de variation de f entre 2 et 6.

Application 2 :

$f(x) = 1/x$ sur $D_f =]\,0\,;+\infty\,[$

Déterminez le taux de variation de f entre 2 et 6.

$$T = \frac{f(2) - f(6)}{2 - 6} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}}{-4}$$

Application 2 :

$f(x) = 1/x$ sur $D_f = \,]\, 0 \,;\, +\infty\, [$

Déterminez le taux de variation de f entre 2 et 6.

$$T = \frac{f(2) - f(6)}{2 - 6} = \frac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6}}{-4} = \frac{\dfrac{1\times 3}{2\times 3} - \dfrac{1}{6}}{-4}$$

Application 2 :

$f(x) = 1/x$ sur $D_f =]\,0\,;+\infty\,[$

Déterminez le taux de variation de f entre 2 et 6.

$$T = \frac{f(2) - f(6)}{2 - 6} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}}{-4} = \frac{\frac{3}{6} - \frac{1}{6}}{-4}$$

Application 2 :

$f(x) = 1/x$ sur $D_f = \,]\,0\,;+\infty\,[$

Déterminez le taux de variation de f entre 2 et 6.

$$T = \frac{f(2) - f(6)}{2 - 6} = \frac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6}}{-4} = \frac{\dfrac{3 - 1}{6}}{-4}$$

Application 2 :

$f(x) = 1/x$ sur $D_f =]\,0\,;+\infty\,[$

Déterminez le taux de variation de f entre 2 et 6.

$$T = \frac{f(2) - f(6)}{2 - 6} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}}{-4} = \frac{\frac{-2}{6}}{-4}$$

Application 2 :

$f(x) = 1/x$ sur $D_f =]\,0\,;+\infty\,[$

Déterminez le taux de variation de f entre 2 et 6.

$$T = \frac{f(2) - f(6)}{2 - 6} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}}{-4} = \frac{\frac{-1}{3}}{-4}$$

Application 2 :

$f(x) = 1/x$ sur $D_f =]\,0\,;+\infty\,[$

Déterminez le taux de variation de f entre 2 et 6.

$$T = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}}{2 - 6} = \frac{\frac{-1}{3}}{-4} = \frac{-1}{3} \times \frac{1}{-4}$$

Application 2 :

$f(x) = 1/x$ sur $D_f =]\,0\,;+\infty\,[$

Déterminez le taux de variation de f entre 2 et 6.

$$T = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}}{2-6} = \frac{\frac{-1}{3}}{-4} = \frac{-1}{3} \times \frac{1}{-4} = -1/12$$

Application 3 :

$$f(x) = \frac{2}{3x - 1} \quad \text{sur } D_f = \left]\, 0 \,;\, +\infty \,\right[$$

Déterminez le taux de variation de f entre 1 et 2.

Application 3 :

f(x) = 2/(3x – 1) sur D_f =] 0 ; + ∞ [

Déterminez le taux de variation de f entre 1 et 2.

$$T = \frac{f(1) - f(2)}{1 - 2} = \frac{\dfrac{2}{3(1) - 1} - \dfrac{2}{3(2) - 1}}{-1}$$

Application 3 :

f(x) = 2/(3x – 1) sur D_f =] 0 ; + ∞ [

Déterminez le taux de variation de f entre 1 et 2.

$$T = \frac{f(1) - f(2)}{1 - 2} = \frac{\frac{2}{2} - \frac{2}{5}}{-1}$$

Application 3 :

$f(x) = 2/(\,3x - 1\,)$ sur $D_f = \left]\,0\,;+\infty\,\right[$

Déterminez le taux de variation de f entre 1 et 2.

$$T = \frac{f(1) - f(2)}{1 - 2} = \frac{\dfrac{2}{2} - \dfrac{2}{5}}{-1} = \frac{1 - 0{,}4}{-1}$$

Application 3 :

$f(x) = 2/(3x - 1)$ sur $D_f =]\, 0 \,;\, +\infty\, [$

Déterminez le taux de variation de f entre 1 et 2.

$$T = \frac{f(1) - f(2)}{1 - 2} = \frac{1 - 0{,}4}{-1} = -0{,}6$$

Application 3 :

$f(x) = 2/(3x - 1)$ sur $D_f =]0 ; +\infty[$

Déterminez le taux de variation de f entre 5 et 8.

$$T = \frac{f(5) - f(8)}{5 - 8} = \frac{\frac{2}{14} - \frac{2}{23}}{-3}$$

Application 3 :

f(x) = 2/(3x – 1) sur D_f =] 0 ; + ∞ [

Déterminez le taux de variation de f entre 5 et 8.

$$T = \frac{f(5) - f(8)}{5 - 8} = \frac{\frac{1}{7} - \frac{2}{23}}{-3}$$

Application 3 :

$f(x) = 2/(\,3x - 1\,)$ sur $D_f = \,]\,0\,;+\infty\,[$

Déterminez le taux de variation de f entre 5 et 8.

$$T = \frac{f(5) - f(8)}{5 - 8} = \frac{\dfrac{1\times 23}{7\times 23} - \dfrac{2\times 7}{23\times 7}}{-\,3}$$

Application 3 :

$f(x) = 2/(\ 3x - 1\ )$ sur $D_f =]\ 0\ ;+\infty\ [$

Déterminez le taux de variation de f entre 5 et 8.

$$T = \frac{f(5) - f(8)}{5 - 8} = \frac{\dfrac{1\times 23 - 2\times 7}{7\times 23}}{-\ 3}$$

Application 3 :

$f(x) = 2/(3x - 1)$ sur $D_f =]0 ; +\infty[$

Déterminez le taux de variation de f entre 5 et 8.

$$T = \frac{f(5) - f(8)}{5 - 8} = \frac{\frac{9}{161}}{-3}$$

Application 3 :

$f(x) = 2/(\,3x - 1\,)$ sur $D_f =]\,0\,;+\infty\,[$

Déterminez le taux de variation de f entre 5 et 8.

$$T = \frac{f(5) - f(8)}{5 - 8} = \frac{\dfrac{9}{161}}{-3} = \frac{9}{161} \times \frac{1}{-3}$$

Application 3 :

f(x) = 2/(3x – 1) sur D_f =] 0 ; + ∞ [

Déterminez le taux de variation de f entre 5 et 8.

$$T = \frac{f(5) - f(8)}{5 - 8} = \frac{\frac{9}{161}}{-3} = \frac{-3}{161}$$

Exercice 1 :

$f(x) = -3x + 7$ sur $D_f = [\,0\,;+\infty\,[$

1°) Déterminez le taux de variation de f entre x_1 et x_2 quelconques de D_f .

2°) Que remarquez-vous ? Concluez.

$f(x) = -3x + 7$ sur $D_f = [\,0\,;+\infty\,[$

Pour tous les x_1 et x_2 de $[\,0\,;+\infty\,[$:

Taux de variation de f entre x_1 et x_2 :

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

$f(x) = -3x + 7$ sur $D_f = [\,0\,;+\infty\,[$

Pour tous les x_1 et x_2 de $[\,0\,;+\infty\,[$:

Taux de variation de f entre x_1 et x_2 :

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(-3x_1 + 7) - (-3x_2 + 7)}{x_1 - x_2}$$

$f(x) = -3x + 7$ sur $D_f = [\,0\,;+\infty\,[$

Pour tous les x_1 et x_2 de $[\,0\,;+\infty\,[$:

Taux de variation de f entre x_1 et x_2 :

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(-3x_1 + 7) - (-3x_2 + 7)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{-3x_1 + 7 + 3x_2 - 7}{x_1 - x_2}$$

$f(x) = -3x + 7$ sur $D_f = [\,0\,;+\infty\,[$

Pour tous les x_1 et x_2 de $[\,0\,;+\infty\,[$:

Taux de variation de f entre x_1 et x_2 :

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(-3x_1 + 7) - (-3x_2 + 7)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{-3x_1 + 7 + 3x_2 - 7}{x_1 - x_2} = \frac{-3x_1 + 3x_2}{x_1 - x_2}$$

$f(x) = -3x + 7$ sur $D_f = [\,0\,;+\infty\,[$

Pour tous les x_1 et x_2 de $[\,0\,;+\infty\,[$:

Taux de variation de f entre x_1 et x_2 :

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(-3x_1 + 7) - (-3x_2 + 7)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{-3x_1 + 7 + 3x_2 - 7}{x_1 - x_2} = \frac{-3(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2}$$

$f(x) = -3x + 7$ sur $D_f = [\,0\,;+\infty\,[$

Pour tous les x_1 et x_2 de $[\,0\,;+\infty\,[$:

Taux de variation de f entre x_1 et x_2 :

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(-3x_1 + 7) - (-3x_2 + 7)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{-3x_1 + 7 + 3x_2 - 7}{x_1 - x_2} = \frac{-3(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = -3$$

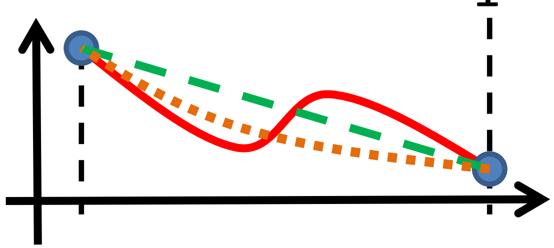
$f(x) = -3x + 7$ sur $D_f = [\,0\,;+\infty\,[$

Pour tous les x_1 et x_2 de $[\,0\,;+\infty\,[$:

Taux de variation de f entre x_1 et x_2 :

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(-3x_1 + 7) - (-3x_2 + 7)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{-3x_1 + 7 + 3x_2 - 7}{x_1 - x_2} = \frac{-3(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = -3$$



T (pour deux valeurs de x_1 et x_2) < 0 n'est pas la preuve

que f est décroissante pour toutes les valeurs de x_1 et x_2

$f(x) = -3x + 7$ sur $D_f = [\ 0 \ ; +\infty\ [$

Pour tous les x_1 et x_2 de $[\ 0 \ ; +\infty\ [$:

Taux de variation de f entre x_1 et x_2 :

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(-3x_1 + 7) - (-3x_2 + 7)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{-3x_1 + 7 + 3x_2 - 7}{x_1 - x_2} = \frac{-3(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = -3$$

Pour tous les x_1 et x_2 de $]\ -\infty \ ; +\infty\ [$, $T < 0$

$f(x) = -3x + 7$ sur $D_f = [\,0\,;+\infty\,[$

Pour tous les x_1 et x_2 de $[\,0\,;+\infty\,[$:

Taux de variation de f entre x_1 et x_2 :

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(-3x_1 + 7) - (-3x_2 + 7)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{-3x_1 + 7 + 3x_2 - 7}{x_1 - x_2} = \frac{-3(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = -3$$

Pour tous les x_1 et x_2 de $]-\infty\,;+\infty\,[$, $T < 0$

$\Leftrightarrow$ f est strictement **décroissante** sur $]-\infty\,;+\infty\,[$

Exercice 1 bis :

$f(x) = 2x - 9$ sur $D_f = [\ 1\ ;\ 4\ ]$

1°) Déterminez le taux de variation de f entre x_1 et x_2 quelconques de D_f .

2°) Que remarquez-vous ? Concluez.

$f(x) = 2x - 9$ sur $D_f = [\,1\,;\,4\,]$

Pour tous les x_1 et x_2 de $[\,1\,;\,4\,]$:

Taux de variation de f entre x_1 et x_2 :

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(\,2x_1 - 9\,) - (\,2x_2 - 9\,)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{2x_1 - 9 - 2x_2 + 9}{x_1 - x_2} = \frac{2(\,x_1 - x_2\,)}{x_1 - x_2} = 2$$

Pour tous les x_1 et x_2 de $[\,1\,;\,4\,]$, $T > 0$

$\Leftrightarrow$ f est strictement croissante sur $[\,1\,;\,4\,]$

Application 4 :

$f(x) = x^2$ sur $D_f = \left]\, 0\,;\, +\infty \,\right[$

1°) Déterminez le taux de variation de f entre x_1 et x_2 quelconques de D_f .

2°) Que remarquez-vous ? Concluez.

Appl. 4 : $f(x) = x^2$ sur $D_f =]\,0\,;+\infty\,[$

1°) Déterminez le taux de variation de f entre x_1 et x_2 quelconques de D_f.

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^{\,2} - x_2^{\,2}}{x_1 - x_2}$$

Appl. 4 : $f(x) = x^2$ sur $D_f =]\,0\,;+\infty\,[$

1°) Déterminez le taux de variation de f entre x_1 et x_2 quelconques de D_f .

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^{\,2} - x_2^{\,2}}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{(\,x_1 - x_2\,)\,(\,x_1 + x_2\,)}{x_1 - x_2}$$

identité remarquable

$a^2 - b^2 =$

$(\,a - b\,)\,(\,a + b\,)$

Appl. 4 : $f(x) = x^2$ sur $D_f =]\,0\,;+\infty\,[$

1°) Déterminez le taux de variation de f entre x_1 et x_2 quelconques de D_f .

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{{x_1}^2 - {x_2}^2}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2$$

Appl. 4 : $f(x) = x^2$ sur $D_f =]\,0\,;+\infty\,[$

1°) Déterminez le taux de variation de f entre x_1 et x_2 quelconques de D_f .

$T = x_1 + x_2$

2°) Que remarquez-vous ? Concluez.

Appl. 4 : $f(x) = x^2$ sur $D_f =]\,0\,;+\infty\,[$

1°) Déterminez le taux de variation de f entre x_1 et x_2 quelconques de D_f .

$T = x_1 + x_2$

2°) Que remarquez-vous ? Concluez.

Pour tous les x_1 et x_2 de $]\,0\,;+\infty\,[$,

$x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0 \Longrightarrow T = x_1 + x_2 \geq 0$

Appl. 4 : $f(x) = x^2$ sur $D_f =]\,0\,;+\infty\,[$

1°) taux de variation $\qquad T = x_1 + x_2$

2°) Que remarquez-vous ? Concluez.

Pour tous les x_1 et x_2 de $]\,0\,;+\infty\,[$,

$x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0 \implies T = x_1 + x_2 \geq 0$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Pour tous les } x_1 \text{ et } x_2 \\ \qquad\qquad \text{de }]\,0\,;+\infty\,[\\ T \geq 0\end{array}\right\} \iff \begin{array}{l} f \text{ est strict.} \\ \quad\text{croissante} \\ \text{sur }]\,0\,;+\infty\,[\end{array}$$

Application 5 :

$f(x) = -\ 3x^2 + 7$ sur $D_f =]-\infty ; 0]$

1°) Déterminez le taux de variation de f entre x_1 et x_2 quelconques de D_f .

2°) Que remarquez-vous ? Concluez.

Appl. 5 : $f(x) = -3x^2 + 7$ sur $]-\infty\,;0]$

1°) Déterminez le taux de variation de f entre x_1 et x_2 quelconques de D_f.

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(-3x_1^2 + 7) - (-3x_2^2 + 7)}{x_1 - x_2}$$

Appl. 5 : $f(x) = -3x^2 + 7$ sur $]-\infty\,;0]$

1°) Déterminez le taux de variation de f entre x_1 et x_2 quelconques de D_f.

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(-3x_1^2 + 7) - (-3x_2^2 + 7)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{-3x_1^2 + 7 + 3x_2^2 - 7}{x_1 - x_2}$$

Appl. 5 : $f(x) = -3x^2 + 7$ sur $]-\infty\,;0]$

1°) Déterminez le taux de variation de f entre x_1 et x_2 quelconques de D_f.

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(-3x_1^2 + 7) - (-3x_2^2 + 7)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{-3x_1^2 + 7 + 3x_2^2 - 7}{x_1 - x_2} = \frac{-3(x_1^2 - x_2^2)}{x_1 - x_2}$$

Appl. 5 : $f(x) = -3x^2 + 7$ sur $]-\infty\,;0\,]$

1°) Déterminez le taux de variation de f entre x_1 et x_2 quelconques de D_f.

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(-3x_1^2 + 7) - (-3x_2^2 + 7)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{-3(x_1^2 - x_2^2)}{x_1 - x_2} = \frac{-3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2}$$

Appl. 5 : $f(x) = -3x^2 + 7$ sur $]-\infty\,;0]$

1°) Déterminez le taux de variation de f entre x_1 et x_2 quelconques de D_f.

$$T = \frac{(-3x_1^2 + 7) - (-3x_2^2 + 7)}{x_1 - x_2} = \frac{-3(x_1^2 - x_2^2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{-3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = -3(x_1 + x_2)$$

Appl. 5 : $f(x) = -3x^2 + 7$ sur $]-\infty\,;0]$

1°) taux de variation $T = -3(x_1 + x_2)$

2°) Que remarquez-vous ? Concluez.

Pour tous les x_1 et x_2 de $]-\infty\,;0]$,

$x_1 \leq 0$ et $x_2 \leq 0 \Rightarrow x_1 + x_2 \leq 0 \Rightarrow T \geq 0$

Appl. 5 : $f(x) = -3x^2 + 7$ sur $]-\infty\,;0]$

1°) taux de variation $T = -3(x_1 + x_2)$

2°) Que remarquez-vous ? Concluez.

Pour tous les x_1 et x_2 de $]-\infty\,;0]$,

$x_1 \leq 0$ et $x_2 \leq 0 \Rightarrow x_1 + x_2 < 0 \Rightarrow T > 0$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Pour tous les } x_1 \text{ et } x_2 \\ \qquad\qquad \text{de }]-\infty\,;0] \\ T > 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{r}f \text{ est strict.} \\ \text{croissante} \\ \text{sur }]-\infty\,;0]\end{array}$$

Exercice 2 :

Soit la fonction f

définie sur $D_f = [\ 2\ ;\ +\infty\ [$

par $f(x) = 5x^2 - 4x + 3$

Démontrez (en utilisant ce chapitre) que f est strictement croissante.

$f(x) = 5x^2 - 4x + 3$ sur $D_f = [\ 2\ ;+\infty\ [$

Démontrez (en utilisant ce chapitre) que f est strictement croissante.

Etape 1 : déterminer l’expression simplifiée du taux de variation.

Etape 2 : déterminer son signe.

Etape 3 : rassembler les conditions prouvant le sens de variation.

$$f(x) = 5x^2 - 4x + 3 \text{ sur } D_f = [\, 2\,;+\infty\, [$$

Etape 1 : Taux de variation de f entre x_1 et x_2 :

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(5{x_1}^2 - 4x_1 + 3) - (5{x_2}^2 - 4x_2 + 3)}{x_1 - x_2}$$

$f(x) = 5x^2 - 4x + 3$ sur $D_f = [\ 2\ ;+\infty\ [$

Etape 1 : Taux de variation de f entre x_1 et x_2 :

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(5{x_1}^2 - 4x_1 + 3) - (5{x_2}^2 - 4x_2 + 3)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{5{x_1}^2 - 5{x_2}^2 - 4x_1 + 4x_2 + 3 - 3}{x_1 - x_2}$$

$$f(x) = 5x^2 - 4x + 3 \text{ sur } D_f = [\,2\,;+\infty\,[$$

Etape 1 : Taux de variation de f entre x_1 et x_2 :

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(5x_1^2 - 4x_1 + 3) - (5x_2^2 - 4x_2 + 3)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{5x_1^2 - 5x_2^2 - 4x_1 + 4x_2 + 3 - 3}{x_1 - x_2} = \frac{5(x_1^2 - x_2^2) - 4(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$f(x) = 5x^2 - 4x + 3 \text{ sur } D_f = [\, 2 \,;\, +\infty \,[$$

Etape 1 : Taux de variation de f entre x_1 et x_2 :

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(5{x_1}^2 - 4x_1 + 3) - (5{x_2}^2 - 4x_2 + 3)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{5{x_1}^2 - 5{x_2}^2 - 4x_1 + 4x_2 + 3 - 3}{x_1 - x_2} = \frac{5({x_1}^2 - {x_2}^2) - 4(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{5(x_1 - x_2)\,(x_1 + x_2) - 4(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$f(x) = 5x^2 - 4x + 3 \text{ sur } D_f = [\,2\,;+\infty\,[$$

Etape 1 : Taux de variation de f entre x_1 et x_2 :

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(5x_1^2 - 4x_1 + 3) - (5x_2^2 - 4x_2 + 3)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{5x_1^2 - 5x_2^2 - 4x_1 + 4x_2 + 3 - 3}{x_1 - x_2} = \frac{5(x_1^2 - x_2^2) - 4(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{5(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 4(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2)[5(x_1 + x_2) - 4]}{x_1 - x_2}$$

$$f(x) = 5x^2 - 4x + 3 \text{ sur } D_f = [\, 2\,;\, +\infty\, [$$

Etape 1 : Taux de variation de f entre x_1 et x_2 :

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(5x_1^2 - 4x_1 + 3) - (5x_2^2 - 4x_2 + 3)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{5x_1^2 - 5x_2^2 - 4x_1 + 4x_2 + 3 - 3}{x_1 - x_2} = \frac{5(x_1^2 - x_2^2) - 4(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{(x_1 - x_2)\,[\,5(x_1 + x_2) - 4\,]}{x_1 - x_2} = 5(x_1 + x_2) - 4$$

$$f(x) = 5x^2 - 4x + 3 \text{ sur } D_f = [\ 2\ ;\ +\infty\ [$$

Etape 2 : Déterminer le signe du taux de variation.

$$T = 5(\ x_1 + x_2\ ) - 4$$

Pour tous les x_1 et x_2 de $[\ 2\ ;\ +\infty\ [$

$x_1 \geq 2$ et $x_2 \geq 2$ $\Rightarrow$ $x_1 + x_2 \geq 2 + 2$

additionner deux ordres (rangés dans le même ordre) conserve l'ordre

$f(x) = 5x^2 - 4x + 3$ sur $D_f = [\ 2\ ;+\infty\ [$

Etape 2 : Déterminer le signe du taux de variation.

$$T = 5(\ x_1 + x_2\ ) - 4$$

Pour tous les x_1 et x_2 de $[\ 2\ ;+\infty\ [$

$x_1 \geq 2$ et $x_2 \geq 2 \Longrightarrow x_1 + x_2 \geq 2 + 2$

$\Longleftrightarrow 5\times(\ x_1 + x_2\ ) \geq 5\times 4$

multiplier par un positif conserve l'ordre

$f(x) = 5x^2 - 4x + 3$ sur $D_f = [\ 2\ ; +\infty\ [$

Etape 2 : Déterminer le signe du taux de variation.

$T = 5(x_1 + x_2) - 4$

Pour tous les x_1 et x_2 de $[\ 2\ ; +\infty\ [$

$x_1 \geq 2$ et $x_2 \geq 2 \Rightarrow x_1 + x_2 \geq 2 + 2$

$\Leftrightarrow 5\times(x_1 + x_2) \geq 5\times4$

$\Leftrightarrow 5\times(x_1 + x_2) - 4 \geq 5\times4 - 4$

soustraire conserve l'ordre

$$f(x) = 5x^2 - 4x + 3 \text{ sur } D_f = [\,2\,;+\infty\,[$$

Etape 2 : Déterminer le signe du taux de variation.

$$T = 5(\,x_1 + x_2\,) - 4$$

Pour tous les x_1 et x_2 de $[\,2\,;+\infty\,[$

$x_1 \geq 2$ et $x_2 \geq 2$ $\Rightarrow$ $x_1 + x_2 \geq 2 + 2$

$\Leftrightarrow$ $5\times(\,x_1 + x_2\,) \geq 5\times4$

$\Leftrightarrow$ $5\times(\,x_1 + x_2\,) - 4 \geq 5\times4 - 4 = 16$

$\Rightarrow$ $T > 0$

$f(x) = 5x^2 - 4x + 3$ sur $D_f = [\ 2\ ;+\infty\ [$

Etape 2 : Déterminer le signe du taux de variation.

$$T = 5(\ x_1 + x_2\ ) - 4$$

Pour tous les x_1 et x_2 de $[\ 2\ ;+\infty\ [$

$x_1 \geq 2$ et $x_2 \geq 2 \Rightarrow x_1 + x_2 \geq 2 + 2$

$\Leftrightarrow 5\times(\ x_1 + x_2\ ) \geq 5\times 4$

$\Leftrightarrow 5\times(\ x_1 + x_2\ ) - 4 \geq 5\times 4 - 4 = 16$

$\Rightarrow T > 0$

Etape 3 : rassembler les conditions prouvant le sens de variation.

$f(x) = 5x^2 - 4x + 3$ sur $D_f = [\ 2\ ;\ +\infty\ [$

Etape 1 : déterminer l'expression simplifiée du taux de variation. $T = 5(\ x_1 + x_2\ ) - 4$

Etape 2 : déterminer son signe. **$T > 0$**

Etape 3 : rassembler les conditions prouvant le sens de variation.

Pour tous les x_1 et x_2 de $[\ 2\ ;\ +\infty\ [$:

Taux de variation de f entre x_1 et x_2 :

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \iff$$

f est str. **croissante** sur $[\ 2\ ;\ +\infty\ [$

Exercice 3 :

Soit la fonction f définie sur $D_f = [-4\ ;\ 7]$

par $f(x) = -2x^2 + 4x - 5$

Démontrez (en utilisant ce chapitre) que f est strictement décroissante sur $]1\ ;\ 7]$.

Etape 1 : déterminer l'expression simplifiée du taux de variation.

Etape 2 : déterminer son signe.

Etape 3 : rassembler les conditions prouvant le sens de variation.

$f(x) = -2x^2 + 4x - 5$ sur $D_f = [-4 ; 7]$

Etape 1 : Taux de variation de f entre x_1 et x_2 :

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(-2x_1^2 + 4x_1 - 5) - (-2x_2^2 + 4x_2 - 5)}{x_1 - x_2}$$

$f(x) = - 2x^2 + 4x - 5$ sur $D_f = [- 4 ; 7]$

Etape 1 : Taux de variation de f entre x_1 et x_2 :

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(-2x_1^2 + 4x_1 - 5) - (-2x_2^2 + 4x_2 - 5)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{- 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1 - 4x_2 - 5 + 5}{x_1 - x_2}$$

$f(x) = -2x^2 + 4x - 5$ sur $D_f = [-4 ; 7]$

Etape 1 : Taux de variation de f entre x_1 et x_2 :

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(-2x_1^2 + 4x_1 - 5) - (-2x_2^2 + 4x_2 - 5)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{-2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1 - 4x_2 - 5 + 5}{x_1 - x_2} = \frac{-2(x_1^2 - x_2^2) + 4(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$f(x) = -2x^2 + 4x - 5 \text{ sur } D_f = [-4 ; 7]$$

Etape 1 : Taux de variation de f entre x_1 et x_2 :

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(-2x_1^2 + 4x_1 - 5) - (-2x_2^2 + 4x_2 - 5)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{-2(x_1^2 - x_2^2) + 4(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{-2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + 4(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2}$$

$f(x) = -2x^2 + 4x - 5$ sur $D_f = [-4\,;7]$

Etape 1 : Taux de variation de f entre x_1 et x_2 :

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(-2x_1^2 + 4x_1 - 5) - (-2x_2^2 + 4x_2 - 5)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{-2(x_1^2 - x_2^2) + 4(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{-2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + 4(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{(x_1 - x_2)[-2(x_1 + x_2) + 4]}{x_1 - x_2}$$

$$f(x) = -2x^2 + 4x - 5 \text{ sur } D_f = [-4 ; 7]$$

Etape 1 : Taux de variation de f entre x_1 et x_2 :

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(-2x_1^2 + 4x_1 - 5) - (-2x_2^2 + 4x_2 - 5)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{-2(x_1^2 - x_2^2) + 4(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{-2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + 4(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{(x_1 - x_2)[-2(x_1 + x_2) + 4]}{x_1 - x_2} = -2(x_1 + x_2) + 4$$

$f(x) = -2x^2 + 4x - 5$ sur $D_f = [-4 ; 7]$

Etape 1 : expression simplifiée $T = -2(x_1 + x_2) + 4$

Etape 2 : déterminer son signe.

Pour tous les x_1 et x_2 de $]1 ; 7]$:

$1 < x_1 \leq 7$ et $1 < x_2 \leq 7 \Rightarrow 1 + 1 < x_1 + x_2 \leq 7 + 7$

$\Leftrightarrow 2 < x_1 + x_2 \leq 14$

additionner deux ordres

$f(x) = -2x^2 + 4x - 5$ sur $D_f = [-4 ; 7]$

Etape 1 : expression simplifiée $T = -2(x_1 + x_2) + 4$

Etape 2 : déterminer son signe.

Pour tous les x_1 et x_2 de $]1 ; 7]$:

$1 < x_1 \leq 7$ et $1 < x_2 \leq 7 \Longrightarrow 1 + 1 < x_1 + x_2 \leq 7 + 7$

additionner deux ordres $\Longleftrightarrow 2 < x_1 + x_2 \leq 14$

$\Longleftrightarrow -2\times 2 > -2(x_1 + x_2) \geq -2\times 14$ multiplier par un négatif. inverse l'ordre

$f(x) = -2x^2 + 4x - 5$ sur $D_f = [-4 ; 7]$

Etape 1 : expression simplifiée $T = -2(x_1 + x_2) + 4$

Etape 2 : déterminer son signe.

Pour tous les x_1 et x_2 de $]1 ; 7]$:

$1 < x_1 \leq 7$ et $1 < x_2 \leq 7 \Longrightarrow 1 + 1 < x_1 + x_2 \leq 7 + 7$

additionner deux ordres $\Longleftrightarrow 2 < x_1 + x_2 \leq 14$

$\Longleftrightarrow -2\times 2 > -2(x_1 + x_2) \geq -2\times 14$ multiplier par un négatif. inverse l'ordre

$\Longleftrightarrow -4 + 4 > -2(x_1 + x_2) + 4 \geq -28 + 4$ additionner conserve l'ordre

$f(x) = -2x^2 + 4x - 5$ sur $D_f = [-4 ; 7]$

Etape 1 : expression simplifiée $T = -2(x_1 + x_2) + 4$

Etape 2 : déterminer son signe.

Pour tous les x_1 et x_2 de $]1 ; 7]$:

$1 < x_1 \leq 7$ et $1 < x_2 \leq 7 \Rightarrow 1 + 1 < x_1 + x_2 \leq 7 + 7$

additionner deux ordres $\Leftrightarrow 2 < x_1 + x_2 \leq 14$

$\Leftrightarrow -2\times 2 > -2(x_1 + x_2) \geq -2\times 14$ multiplier par un négatif. inverse l'ordre

$\Leftrightarrow -4 + 4 > -2(x_1 + x_2) + 4 \geq -28 + 4$ additionner conserve l'ordre

$\Leftrightarrow 0 > -2(x_1 + x_2) + 4 \geq -24$

$f(x) = -\ 2x^2 + 4x - 5$ sur $D_f = [\ -\ 4\ ;\ 7\ ]$

Etape 1 : expression simplifiée $T = -\ 2(\ x_1 + x_2\ ) + 4$

Etape 2 : déterminer son signe.

Pour tous les x_1 et x_2 de $]\ 1\ ;\ 7\ ]$:

$1 < x_1 \leq 7$ et $1 < x_2 \leq 7 \Longrightarrow 1 + 1 < x_1 + x_2 \leq 7 + 7$

additionner deux ordres $\Longleftrightarrow 2 < x_1 + x_2 \leq 14$

$\Longleftrightarrow -\ 2\times 2 > -\ 2(\ x_1 + x_2\ ) \geq -\ 2\times 14$ multiplier par un négatif. inverse l'ordre

$\Longleftrightarrow -\ 4 + 4 > -\ 2(\ x_1 + x_2\ ) + 4 \geq -\ 28 + 4$ additionner conserve l'ordre

$\Longleftrightarrow 0 > -\ 2(\ x_1 + x_2\ ) + 4 \geq -\ 24$

$\Longleftrightarrow 0 > T \geq -\ 24 \Longrightarrow T < 0$

$f(x) = -2x^2 + 4x - 5$ sur $D_f = [-4 ; 7]$

Etape 1 : déterminer l'expression simplifiée du taux de variation. $T = -2(x_1 + x_2) + 4$

Etape 2 : déterminer son signe. $T < 0$

Etape 3 : rassembler les deux conditions prouvant le sens de variation.

1) Pour tous les x_1 et x_2 de $[1 ; 7]$:

Taux de variation de f entre x_1 et x_2 :

2) $T = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow$ f est str. **décroissante** sur $[1 ; 7]$