chapitre 6 (spé) **Application de la dérivation**

I Théorème de la monotonie

$f'(x) > 0$ pour des x de [a ; b]

$\Longleftrightarrow$ …

 Application de la dérivation

I Théorème de la monotonie

$f'(x) > 0$ pour des x de [a ; b]

$\Longleftrightarrow$ les coefficients directeurs des tangentes à la courbe de f aux points d'abscisses x sont positifs.

$\Longleftrightarrow$ …

 Application de la dérivation

I Théorème de la monotonie

$f'(x) > 0$ pour des x de [a ; b]

$\Longleftrightarrow$ les coefficients directeurs des tangentes à la courbe de f aux points d'abscisses x sont positifs.

$\Longleftrightarrow$ les tangentes grimpent.

$\Longleftrightarrow$ …

chapitre 6 (spé) **Application de la dérivation**

I Théorème de la monotonie

$f'(x) > 0$ pour des x de [a ; b]

$\Longleftrightarrow$ les coefficients directeurs des tangentes à la courbe de f aux points d'abscisses x sont positifs.

$\Longleftrightarrow$ les tangentes grimpent.

$\Longleftrightarrow$ la courbe de f grimpe.

$\Longleftrightarrow$ …

 Application de la dérivation

I Théorème de la monotonie

$f'(x) > 0$ pour des x de [a ; b]

$\Longleftrightarrow$ les coefficients directeurs des tangentes à la courbe de f aux points d’abscisses x sont positifs.

$\Longleftrightarrow$ les tangentes grimpent.

$\Longleftrightarrow$ la courbe de f grimpe.

$\Longleftrightarrow$ la fonction est croissante sur [a ; b].

chapitre 6 (spé) **Application de la dérivation**

I Théorème de la monotonie

$f'(x) > 0$ pour des x de [a ; b]

$\Longleftrightarrow$ les coefficients directeurs des tangentes à la courbe de f aux points d'abscisses x sont positifs.

$\Longleftrightarrow$ les tangentes grimpent.

$\Longleftrightarrow$ la courbe de f grimpe.

$\Longleftrightarrow$ la fonction est croissante sur [a ; b].

Théorème de la monotonie :

(monotonie signifie un seul sens de variation)

$f'(x) > 0$ sur un intervalle J $\Longleftrightarrow$ f est strictement croissante sur J.

…

chapitre 6 (spé) **Application de la dérivation**

I Théorème de la monotonie

$f'(x) > 0$ pour des x de [a ; b]

$\Longleftrightarrow$ les coefficients directeurs des tangentes à la courbe de f aux points d'abscisses x sont positifs.

$\Longleftrightarrow$ les tangentes grimpent.

$\Longleftrightarrow$ la courbe de f grimpe.

$\Longleftrightarrow$ la fonction est croissante sur [a ; b].

Théorème de la monotonie :

(monotonie signifie un seul sens de variation)

$f'(x) > 0$ sur un intervalle J $\Longleftrightarrow$ f est strictement croissante sur J.

$f'(x) = 0$ sur J $\Longleftrightarrow$ f est constante sur J.

$f'(x) < 0$ sur J $\Longleftrightarrow$ f est strictement décroissante sur J.

Ne pas confondre … Ne pas confondre …

Application de la dérivation

I Théorème de la monotonie

$f'(x) > 0$ pour des x de [a ; b]

$\Leftrightarrow$ les coefficients directeurs des tangentes à la courbe de f aux points d'abscisses x sont positifs.

$\Leftrightarrow$ les tangentes grimpent.

$\Leftrightarrow$ la courbe de f grimpe.

$\Leftrightarrow$ la fonction est croissante sur [a ; b].

Théorème de la monotonie :

(monotonie signifie un seul sens de variation)

$f'(x) > 0$ sur un intervalle J $\Leftrightarrow$ f est strictement croissante sur J.

$f'(x) = 0$ sur J $\Leftrightarrow$ f est constante sur J.

$f'(x) < 0$ sur J $\Leftrightarrow$ f est strictement décroissante sur J.

Ne pas confondre f et f ' Ne pas confondre signes et variations

Détermination des sens de variation d’une fonction dont on donne l’expression $f(x) = \ldots$

Méthode : tableau de signes de f ‘ et de variation de f

1) Détermination de f ‘(x)

2) Résolution de f ‘(x) = 0 f ‘(x) > 0 f ‘(x) < 0

Détermination des sens de variation d'une fonction dont on donne l'expression f(x) = …

Méthode : tableau de signes de f ' et de variation de f

1) Détermination de f '(x)

2) Résolution de f '(x) = 0 f '(x) > 0 f '(x) < 0

3) On remplit les lignes 1 et 2 du tableau.

Ex :

x	- ∞		-5		6		+ ∞
f '(x)		-	0	+	0	-	

Détermination des sens de variation d'une fonction dont on donne l'expression f(x) = …

Méthode : tableau de signes de f ' et de variation de f

1) Détermination de f '(x)

2) Résolution de f '(x) = 0   f '(x) > 0   f '(x) < 0

3) On remplit les lignes 1 et 2 du tableau.

4) Le théorème de la monotonie remplit la ligne 3.

Ex :

x	$-\infty$		-5		6		$+\infty$
f '(x)		-	0	+	0	-	
f(x)		↘		↗		↘	

Exercice 1 :

Puisque vous venez de découvrir un outil bien plus pratique que les connaissances de l'année dernière, retrouvez les **sens de variations des fonctions suivantes** (on précisera leurs ensembles de définition et de dérivabilité) :

1°) fonction carré

2°) fonctions polynômes degré 2

(on supposera $a < 0$)

1°) fonction carré

$f(x) = x^2$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ $f'(x) = 2x$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		
$f(x)$		

1°) fonction carré

$f(x) = x^2$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ $f'(x) = 2x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	**0**	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$			

1°) fonction carré

$f(x) = x^2$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ $f'(x) = 2x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow$ x dans $[\,0\,;+\infty\,[$

x	$-\infty$	0		$+\infty$
f '(x)		0	+	
f(x)				

1°) fonction carré

$f(x) = x^2$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ $f'(x) = 2x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow$ x dans $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x < 0 \Leftrightarrow x < 0 \Leftrightarrow$ x dans $]\ -\infty\ ;\ 0\ [$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$					

1°) fonction carré

$f(x) = x^2$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ $f'(x) = 2x$

$f'(x) > 0$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ $\Leftrightarrow$ f strictement croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$					

1°) fonction carré

$f(x) = x^2$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ $f'(x) = 2x$

$f'(x) > 0$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ $\Leftrightarrow$ f strictement croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$

$f'(x) < 0$ sur $]-\infty\,;0\,[$ $\Leftrightarrow$ f strict. décroissante sur $]-\infty\,;0\,[$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Remarque : $f(x) = x^2$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f(x)		↘		↗	

Je savais (depuis le chapitre 2) que la fonction carré a une parabole comme courbe, orientée vers le haut.

Je savais aussi qu'elle avait un axe de symétrie vertical, et un sommet en l'origine,

donc je viens de démontrer les sens de variation de la fonction carré par un autre moyen (le théorème de la monotonie).

Exo 1 2°) fct poly degré 2 (avec $a < 0$)

Méthode :

1) dérivée de f

2) signe de f ‘

3) sens de variation de f

x	- ∞ + ∞
f ‘(x)	
f(x)	

Exo 1 2°) fct poly degré 2 (avec $a < 0$)

1) dérivée de $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$f'(x) = a\,(x^2)' + (bx + c)'$$

$$= a\,(2x) + (b)$$

$$= 2ax + b$$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	
$f(x)$	

Exo 1 2°) fct poly degré 2 (avec $a < 0$)

2) signe de $f'(x) = 2ax + b$

$f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ldots$

$f'(x) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ldots$

$f'(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ldots$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	
$f(x)$	

2) signe de $f'(x) = 2ax + b$

$f'(x) = 0 \iff 2ax + b = 0$

$$\iff 2ax = -b \iff x = \frac{-b}{2a}$$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$			

2) signe de $f'(x) = 2ax + b$

$$f'(x) < 0 \iff 2ax + b < 0$$

$$\iff 2ax < -b \iff x < \frac{-b}{2a}$$

OK ?

x	$-\infty$ $\qquad$ $\frac{-b}{2a}$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	0
$f(x)$	

2) signe de $f'(x) = 2ax + b$

$\boxed{f'(x) < 0} \Longleftrightarrow 2ax + b < 0$

$\Longleftrightarrow 2ax < -b \Longleftrightarrow \boxed{x > \dfrac{-b}{2a}}$

division par le négatif (énoncé a < 0) !

x	$-\infty$	$\dfrac{-b}{2a}$	$\boxed{}$ $+\infty$
$f'(x)$		0	$\boxed{-}$
$f(x)$			

2) signe de $f'(x) = 2ax + b$

$\boxed{f'(x) > 0} \Longleftrightarrow 2ax + b > 0$

$\Longleftrightarrow 2ax > -b \Longleftrightarrow \boxed{x < \dfrac{-b}{2a}}$

division par le négatif (énoncé $a < 0$) !

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
f '(x)	+	0	–
f(x)			

3) sens de variation de f

$f'(x) > 0$ sur $\left] -\infty \,; \frac{-b}{2a} \right[$

$\Longleftrightarrow$ ...

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	–
$f(x)$			

3) sens de variation de f

$f'(x) > 0$ sur $\left] -\infty \, ; \frac{-b}{2a} \right[$

$\Longleftrightarrow$ f est strictement

croissante sur $\left] -\infty \, ; \frac{-b}{2a} \right[$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		

3) sens de variation de f

$f'(x) < 0$ sur $\left] \frac{-b}{2a} ; +\infty \right[$

$\Longleftrightarrow$ f est strictement

décroissante sur $\left] \frac{-b}{2a} ; +\infty \right[$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
f '(x)		+	0	−	
f(x)		↗		↘	

Remarque : $f(x) = ax^2 + bx + c$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
f(x)		↗		↘	

Je savais (depuis le chapitre 3) que cette fonction polynôme degré 2 a une parabole comme courbe,

qui est orientée vers le bas car $a < 0$

Je savais aussi qu'elle avait un axe de symétrie vertical, et un sommet (que seule la symétrie me permettait de connaître l'abscisse à partir des racines, lorsqu'elles existaient),

donc je viens de démontrer maintenant que le sommet a une abscisse de $- b/(2a)$

Exo 1 bis

Déterminez les sens de variation des fonctions suivantes :

1°) $f(x) = 3 - 2x$

2°) $g((x) = 2x^2 - 6x \ + 7$

Exo 1 bis   1°) $f(x) = 3 - 2x$

Méthode :

1) dérivée de f
2) signe de f ‘
3) sens de variation de f

x	- ∞ + ∞
f ‘(x)	
f(x)	

Exo 1 bis   1°) $f(x) = 3 - 2x$

1)   dérivée de f

$f'(x) = (ax + b)'$

$= (- 2x + 3)' = - 2$

x	- ∞ + ∞
f '(x)	
f(x)	

Exo 1 bis   1°) $f(x) = 3 - 2x$

1) dérivée de f

$f'(x) = (ax + b)'$

$= (-2x + 3)' = -2$

2) signe de f' $f'(x) = -2 < 0$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	—
$f(x)$	

Exo 1 bis 1°) $f(x) = 3 - 2x$

1) dérivée de f $f'(x) = -2$

2) signe de f ' $f'(x) = -2 < 0$

3) $f'(x) < 0$ sur |R

$\Leftrightarrow$ f str. décroissante sur |R

x	- ∞	+ ∞
f '(x)	—	
f(x)	$\searrow$	

Exo 1 bis 2°) $g(x) = 2x^2 - 6x + 7$

Méthode :

1) dérivée de f
2) signe de f ‘
3) sens de variation de f

x	- ∞ + ∞
f ‘(x)	
f(x)	

Exo 1 bis 2°) $g(x) = 2x^2 - 6x + 7$

1) dérivée de f

$$g'(x) = 2\,(x^2)' + (-6x + 7)'$$

$$= 2\,(2x) + (-6)$$

$$= 4x - 6$$

x	- ∞	+ ∞
f '(x)		
f(x)		

Exo 1 bis 2°) $g(x) = 2x^2 - 6x + 7$

2) signe de $g'(x) = 4x - 6$

$g'(x) = 0 \Longleftrightarrow$ …

$g'(x) < 0 \Longleftrightarrow$ …

$g'(x) > 0 \Longleftrightarrow$ …

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	
$f(x)$	

2) signe de $f'(x) = 4x - 6$

$$g'(x) = 0 \Longleftrightarrow 4x - 6 = 0$$

$$\Longleftrightarrow 4x = 6 \Longleftrightarrow x = \frac{6}{4} = 1{,}5$$

x	- ∞	1,5	+ ∞
f '(x)		0	
f(x)			

2) signe de $f'(x) = 4x - 6$

$\boxed{g'(x) < 0} \Longleftrightarrow 4x - 6 < 0$

$\Longleftrightarrow 4x < 6 \Longleftrightarrow \boxed{x < \dfrac{6}{4} = 1{,}5}$

x	- ∞		1,5	+ ∞
f '(x)		$\boxed{-}$	0	
f(x)				

2) signe de $f'(x) = 4x - 6$

$$\boxed{g'(x) > 0} \Longleftrightarrow 4x - 6 > 0$$

$$\Longleftrightarrow 4x > 6 \Longleftrightarrow \boxed{x > \frac{6}{4} = 1,5}$$

x	$-\infty$		1,5		$+\infty$
f '(x)		$-$	0	$+$	
f(x)					

3) sens de variation de f

g '(x) > 0 sur] 1,5 ; + ∞ [

$\Longleftrightarrow$ g strictement croissante sur] 1,5 ; + ∞ [

x	- ∞	1,5	+ ∞
f '(x)	−	0	+
f(x)			$\nearrow$

3) sens de variation de f

$g'(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\,1{,}5\,[$

$\Longleftrightarrow$ g strictement

décroissante sur $]-\infty\,;\,1{,}5\,[$

x	$-\infty$		$1{,}5$		$+\infty$
f '(x)		$-$	0	$+$	
f(x)		↘		↗	