chapitre 11 de la Spécialité

Dérivées et primitives

I Dérivées :

On ajoute au chapitre 4 du Tronc commun les dérivées

d'autres fonctions,

et on en déduit *de la même façon* (voir les exos du chapitre 4) les sens de variations, les signes et les extremums de fonctions.

Tableau des dérivées pour la $1^{ère}$ en Tronc commun :

avec les fonctions de références		combinées entre elles	
fonction f	dérivée f ‘	*k (nb), u et v (fct)*	
$ax + b$	a	$k \times u$	$k \times u'$
x^n	$n\,x^{n-1}$	$u + v$	$u' + v'$

Tableau des dérivées pour la 1ère en Spécialité :

avec les fonctions de références

fonction f	dérivée f ‘
$ax + b$	a
x^n	$n\,x^{n-1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

combinées entre elles

k (nb), u et v (fct)

$k \times u$	$k \times u'$
$u + v$	$u' + v'$
$u \times v$	$u' \times v + v' \times u$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u' \times v - v' \times u}{v^2}$
$f\,(ax + b)$	$a \times f'\,(ax + b)$

Remarque :

$$(u \times v)' \neq u' \times v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' \neq \frac{u'}{v'}$$

$$(f(u))' \neq f'(u')$$

$u \times v$	$u' \times v + v' \times u$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u' \times v - v' \times u}{v^2}$
$f(ax + b)$	$a \times f'(ax + b)$

Exercice 1 :

Déterminez les dérivées des fonctions suivantes en utilisant le tableau, et simplifiez si possible.

1°) $2x^5 + 3x^3 + 1$

2°) $\sin x + \cos x$

3°) $\dfrac{4x - 3}{5x + 2}$

4°) $\cos(4x - 6)$

5°) $\dfrac{x}{\cos x}$

6°) $(4x^2 - 3) \times 5x^4$

7°) $x \sin(2x + 3)$

8°) $(1 + 3x)^8$

9°) $(2x - 5)^3$

10°) $3x^2 - 5x + 7$

11°) $\dfrac{1}{4 - 9x}$

12°) $\dfrac{4x^2 - x}{5 - x^2}$

1°)

$$(2x^5 + 3x^3 + 1)'$$

$$= (u + v)' = u' + v'$$

$$= (2x^5)' + (3x^3)' + (1)'$$

1°)

$$(2x^5 + 3x^3 + 1)'$$

$$= (u + v)' = u' + v'$$

$$= (2x^5)' + (3x^3)' + (1)'$$

$$(2x^5)' = (ku)' = ku'$$

$$= 2 (x^5)' = 2 (5x^4) = 10x^4$$

1°)

$$(2x^5 + 3x^3 + 1)'$$

$$= (u + v)' = u' + v'$$

$$= (2x^5)' + (3x^3)' + (1)'$$

$$(2x^5)' = (ku)' = ku'$$

$$= 2 (x^5)' = 2 (5x^4) = 10x^4$$

$$(3x^3)' = (ku)' = ku'$$

$$= 3 (x^3)' = 3 (3x^2) = 9x^2$$

1°)

$(2x^5 + 3x^3 + 1)'$

$= (u + v)' = u' + v'$

$= (2x^5)' + (3x^3)' + (1)'$

$(2x^5)' = (ku)' = k u'$

$= 2 (x^5)' = 2 (5x^4) = 10x^4$

$(3x^3)' = (ku)' = k u'$

$= 3 (x^3)' = 3 (3x^2) = 9x^2$

$(1)' = (ax + b)' = a = 0$

1°) copie simplifiée :

$$(2x^5 + 3x^3 + 1)'$$

$$= 2 (x^5)' + 3 (x^3)' + (1)'$$

$$= 2 (5x^4) + 3 (3x^2) + (0)$$

$$= 10x^4 + 9x^2$$

Remarque : on ne dérive pas les + ni les n^b devant les x

(selon les formules $(u + v)' = u' + v'$ et $(ku)' = k u'$)

1°) $(2x^5 + 3x^3 + 1)'$

$= (u + v)' = u' + v'$

$= (2x^5)' + (3x^3)' + (1)'$

$= 2 (5x^4) + 3(3x^2) + (0)$

$= 10x^4 + 9x^2$

2°) $\sin x + \cos x$

$(\sin x + \cos x)' = \ldots ?$

1°) $(2x^5 + 3x^3 + 1)'$

$= (u + v)' = u' + v'$

$= (2x^5)' + (3x^3)' + (1)'$

$= 2 (5x^4) + 3(3x^2) + (0)$

$= 10x^4 + 9x^2$

2°) $\sin x + \cos x$

$(\sin x + \cos x)' = (u + v)'$

$= u' + v'$

1°) $(2x^5 + 3x^3 + 1)'$

$= (u + v)' = u' + v'$

$= (2x^5)' + (3x^3)' + (1)'$

$= 2 (5x^4) + 3(3x^2) + (0)$

$= 10x^4 + 9x^2$

2°) $\sin x + \cos x$

$(\sin x + \cos x)' = (u + v)'$

$= u' + v' = (\sin x)' + (\cos x)'$

$= (\cos x) + (- \sin x) = \cos x - \sin x$

3°)

$$f'(x) = \left(\frac{4x - 3}{5x + 2}\right)' = \ldots ?$$

3°)

$$f'(x) = \left(\frac{4x-3}{5x+2}\right)' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

3°)

$$f'(x) = \left(\frac{4x - 3}{5x + 2}\right)' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - v'\,u}{v^2}$$

$u = 4x - 3$ donc $u' = 4$ $\quad$ $v = 5x + 2$ donc $v' = 5$

3°)

$$f'(x) = \left(\frac{4x-3}{5x+2}\right)' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$u = 4x - 3$ donc $u' = 4$ $v = 5x + 2$ donc $v' = 5$

$$f'(x) = \frac{(4)(5x+2) - (5)(4x-3)}{(5x+2)^2} =$$

3°)

$$f'(x) = \left(\frac{4x - 3}{5x + 2}\right)' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$u = 4x - 3$ donc $u' = 4$ $\quad$ $v = 5x + 2$ donc $v' = 5$

$$f'(x) = \frac{(4)(5x+2) - (5)(4x-3)}{(5x+2)^2} = \frac{20x + 8 - 20x + 15}{(5x+2)^2}$$

3°)

$$f'(x) = \left(\frac{4x - 3}{5x + 2}\right)' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$u = 4x - 3$ donc $u' = 4$ $v = 5x + 2$ donc $v' = 5$

$$f'(x) = \frac{(4)(5x+2) - (5)(4x-3)}{(5x + 2)^2} = \frac{20x + 8 - 20x + 15}{(5x + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{23}{(5x + 2)^2}$$

4°) $\cos(4x - 6)$

$f'(x) = (\cos(ax + b))'$

$= a \times \cos'(ax + b)$

dernière ligne du tableau

$f(ax + b)$ $\quad$ $a \times f'(ax + b)$

4°) $\cos(4x - 6)$

$$f'(x) = (\cos(ax + b))'$$

$$= a \times \cos'(ax + b)$$

dernière ligne du tableau

$f(ax + b)$ $\qquad$ $a \times f'(ax + b)$

$$= 4 \times (-\sin(4x - 6))$$

$$= -4\sin(4x - 6)$$

4°) Remarque :

$\cos(4x - 6) \neq 4\cos x - 6$!

qui donner*ait*

$f'(x) = 4(\cos x)' - (6)'$

$= 4(-\sin x) - 0$

$= -4\sin x$ qui est faux !

5°) x / cos x

$$f'(x) = \left(\frac{x}{\cos x} \right)' = \ldots ?$$

5°) x / cos x

$$f'(x) = \left(\frac{x}{\cos x}\right)' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$u = x$ $\quad$ $u' = \ldots ?$

$v = \cos x$ $\quad$ $v' = \ldots ?$

5°) x / cos x

$$f'(x) = \left(\frac{x}{\cos x} \right)' = \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' v - v' u}{v^2}$$

$u = x$ $\qquad$ $u' = (1x + 0)' = a = 1$

$v = \cos x$ $\qquad$ $v' = -\sin x$

5°) x / cos x

$$f'(x) = \left(\frac{x}{\cos x}\right)' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - v'\,u}{v^2}$$

$$= \frac{1 \cos x - (-\sin x)\,x}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x}$$

6°) $(4x^2 - 3) \times 5x^4$

$((4x^2 - 3) \times 5x^4)'$

$= \ldots$

6°) $(4x^2 - 3) \times 5x^4$

$$\left((4x^2 - 3) \times 5x^4 \right)'$$

$$= (u \times v)' = u'v + v'u$$

$6°)\ (4x^2 - 3) \times 5x^4$

$$((4x^2 - 3) \times 5x^4)'$$

$$= (u \times v)' = u'v + v'u$$

$$= (4x^2 - 3)' \times 5x^4 + (5x^4)' \times (4x^2 - 3)$$

$6°)\ (4x^2 - 3) \times 5x^4$

$$((4x^2 - 3) \times 5x^4)'$$

$$= (u \times v)' = u'v + v'u$$

$$= (4x^2 - 3)' \times 5x^4 + (5x^4)' \times (4x^2 - 3)$$

$$= (4(2x) - 0) \times 5x^4 + 5(4x^3) \times (4x^2 - 3)$$

6°) $(4x^2 - 3) \times 5x^4$

$((4x^2 - 3) \times 5x^4)'$

$= (u \times v)' = u'v + v'u$

$= (4x^2 - 3)' \times 5x^4 + (5x^4)' \times (4x^2 - 3)$

$= (4(2x) - 0) \times 5x^4 + 5(4x^3) \times (4x^2 - 3)$

$= 40x^5 + 80x^5 - 60x^3$

$6°)\ (4x^2 - 3) \times 5x^4$

$((4x^2 - 3) \times 5x^4)'$

$= (u \times v)' = u'v + v'u$

$= (4x^2 - 3)' \times 5x^4 + (5x^4)' \times (4x^2 - 3)$

$= (4(2x) - 0) \times 5x^4 + 5(4x^3) \times (4x^2 - 3)$

$= 40x^5 + 80x^5 - 60x^3$

$= 120x^5 - 60x^3$

6°) $(4x^2 - 3) \times 5x^4$ Autre méthode :

$$((4x^2 - 3) \times 5x^4)'$$

$$= (4x^2 \times 5x^4 - 3 \times 5x^4)'$$

6°) $(4x^2 - 3) \times 5x^4$ Autre méthode :

$((4x^2 - 3) \times 5x^4)'$

$= (4x^2 \times 5x^4 - 3 \times 5x^4)'$

$= (20x^6 - 15x^4)'$

6°) $(4x^2 - 3) \times 5x^4$ Autre méthode :

$$((4x^2 - 3) \times 5x^4)'$$

$$= (4x^2 \times 5x^4 - 3 \times 5x^4)'$$

$$= (20x^6 - 15x^4)'$$

$$= 20 (x^6)' - 15 (x^4)'$$

6°) $(4x^2 - 3) \times 5x^4$ Autre méthode :

$$((4x^2 - 3) \times 5x^4)'$$

$$= (4x^2 \times 5x^4 - 3 \times 5x^4)'$$

$$= (20x^6 - 15x^4)'$$

$$= 20(x^6)' - 15(x^4)'$$

$$= 20(6x^5) - 15(4x^3)$$

6°) $(4x^2 - 3) \times 5x^4$ Autre méthode :

$$((4x^2 - 3) \times 5x^4)'$$

$$= (4x^2 \times 5x^4 - 3 \times 5x^4)'$$

$$= (20x^6 - 15x^4)'$$

$$= 20\,(x^6)' - 15\,(x^4)'$$

$$= 20\,(6x^5) - 15\,(4x^3)$$

$$= 120\,x^5 - 60\,x^3$$

7°)

$$(x \sin (2x + 3))' = \ldots$$

7°)

$$(x \sin (2x + 3))' = (u \times v)'$$

$$= u' v + v' u$$

$$u = x$$

$$v = \sin (2x + 3)$$

7°)

$$(x \sin (2x + 3))' = (u \times v)'$$

$$= u' v + v' u$$

$$u = x \quad u' = (x)' = (ax + b)' = a = 1$$

$$v = \sin (2x + 3)$$

$$v' = (\sin (ax + b))' = a \sin' (ax + b)$$

$$= 2 \cos (2x + 3)$$

7°)

$$(x \sin (2x + 3))' = (u \times v)'$$

$$= u' v + v' u$$

$$= 1 \times \sin (2x + 3)$$

$$+ 2 \cos (2x + 3) \times x$$

$$= \sin (2x + 3) + 2x \cos (2x + 3)$$

8°) $(1 + 3x)^8$

$\left((1 + 3x)^8 \right)' = (\ldots \qquad)'$

8°) $(1 + 3x)^8$

$$\left((1 + 3x)^8 \right)' = \left(f(1 + 3x) \right)'$$

$$= \left(f(ax + b) \right)' = \ldots ?$$

8°) $(1 + 3x)^8$

$$\left((1 + 3x)^8 \right)' = \left(f(1 + 3x) \right)'$$

$$= \left(f(ax + b) \right)' = a\, f'(ax + b)$$

$8°)\ (1 + 3x)^8$

$$\left((1 + 3x)^8 \right)' = \left(f(1 + 3x) \right)'$$

$$= \left(f(ax + b) \right)' = a\, f'(ax + b)$$

$$f(x) = x^8 \qquad (x^8)' = 8x^7$$

$$\left((1 + 3x)^8 \right)' = \ldots ?$$

8°) $(1 + 3x)^8$

$$((1 + 3x)^8)' = (f(1 + 3x))'$$

$$= (f(ax + b))' = a f'(ax + b)$$

$$f(x) = x^8 \qquad (x^8)' = 8x^7$$

$$((1 + 3x)^8)' = a f'(ax + b)$$

$$= 3 \times 8 (1 + 3x)^7$$

$$= 24 (1 + 3x)^7$$

9°) $(2x - 5)^3 = \ldots ?$

9°) $(2x - 5)^3$

$$\left((2x - 5)^3 \right)' = \left(f(2x - 5) \right)'$$

$$= \left(f(ax + b) \right)' = a\, f'(ax + b)$$

$$f(x) = x^3 \qquad (x^3)' = 3x^2$$

$$\left((2x - 5)^3 \right)' = a\, f'(ax + b)$$

$$= 2 \times 3\,(2x - 5)^2$$

$$= 6\,(2x - 5)^2$$

$$= 6\,(4x^2 - 20x + 25) = 24x^2 - 120x + 150$$

9°) $(2x - 5)^3$ Autre méthode :

$$((2x - 5)^3)' = ((2x - 5)^2 \times (2x - 5))'$$

$$= ((4x^2 - 20x + 25) \times (2x - 5))'$$

$$= (8x^3 - 40x^2 + 50x - 20x^2 + 100x - 125)'$$

$$= (8x^3 - 60x^2 + 150x - 125)'$$

$$= 8 (x^3)' - 60 (x^2)' + (150x - 125)'$$

$$= 8 (3x^2) - 60 (2x) + (150)$$

$$= 24x^2 - 120x + 150$$

10°)

$$(3x^2 - 5x + 7)'$$

$$= (u + v)' = u' + v'$$

$$= (3x^2)' + (- 5x + 7)'$$

$$= 3 (x^2) + (- 5x + 7)'$$

$$= 3 (2x) + (- 5)$$

$$= 6x - 5$$

11°) 1 / (4 – 9x)

$$f'(x) = \left(\frac{1}{4 - 9x} \right)' = \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$u = 1$ $\quad u' = (ax + b)' = a = 0$

$v = 4 - 9x$ $\quad v' = (ax + b)' = a = -9$

11°) $1 / (4 - 9x)$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{4-9x}\right)' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$= \frac{0\,(4-9x) - 1\,(-9)}{(4-9x)^2}$$

11°) 1 / (4 – 9x)

$$f'(x) = \left(\frac{1}{4-9x}\right)' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$= \frac{0\,(4-9x) - 1\,(-9)}{(4-9x)^2} = \frac{9}{(4-9x)^2}$$

11°) 1 / (4 – 9x)   Autre méthode

$$f'(x) = \left(\frac{1}{4-9x} \right)' = \left(\frac{1}{4-9x} \right)' = \left(f\,(ax+b) \right)'$$

$= \ldots\ ?$

11°) $1 / (4 - 9x)$ Autre méthode

$$f'(x) = \left(\frac{1}{4-9x} \right)' = \left(\frac{1}{4-9x} \right)' = (f(ax+b))'$$

$$= a\, f'(ax+b) = (-9) \frac{-1}{(4-9x)^2}$$

puisque $(1/x)' = - 1 / x^2$

11°) $1 / (4 - 9x)$ Autre méthode

$$f'(x) = \left(\frac{1}{4-9x}\right)' = \left(\frac{1}{4-9x}\right)' = (\,f\,(ax+b)\,)'$$

$$= a\,f'(ax+b) = (-9)\,\frac{-1}{(4-9x)^2} = \frac{9}{(4-9x)^2}$$

puisque $(\,1/x\,)' = -\,1 / x^2$

12°) $(4x^2 - x) \,/\, (5 - x^2)$

$$f'(x) = \left(\frac{4x^2 - x}{5 - x^2}\right)' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$u = 4x^2 - x$$

$$u' = 4\,(x^2)' - (x)' = 4\,(2x) - 1$$

$$v = 5 - x^2$$

$$v' = (5)' - (x^2)' = 0 - 2x = -2x$$

$12°)$ $(4x^2 - x) \;/\; (5 - x^2)$

$$f'(x) = \left(\frac{4x^2 - x}{5 - x^2}\right)' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$= \frac{(8x - 1)(5 - x^2) - (-2x)(4x^2 - x)}{(5 - x^2)^2}$$

12°) $(4x^2 - x) \;/\; (5 - x^2)$

$$f'(x) = \frac{(8x - 1)(5 - x^2) - (-2x)(4x^2 - x)}{(5 - x^2)^2}$$

$$= \frac{40x - 5 - 8x^3 + x^2 + 8x^3 - 2x^2}{(5 - x^2)^2}$$

12°) $(4x^2 - x) \;/\; (5 - x^2)$

$$f'(x) = \frac{(8x - 1)(5 - x^2) - (-2x)(4x^2 - x)}{(5 - x^2)^2}$$

$$= \frac{40x - 5 - x^2}{(5 - x^2)^2}$$