chapitre 10 **Produit scalaire**

I Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'écrit $\vec{u} \cdot \vec{v}$

chapitre 10 **Produit scalaire**

I Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

s'écrit $\vec{u} \cdot \vec{v}$

se lit $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$

chapitre 10 **Produit scalaire**

I Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

s'écrit $\vec{u} \cdot \vec{v}$

se lit $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$

et est le réel $\boxed{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u} ; \vec{v})}$

longueur × longueur × cos de l'angle orienté

Exercice 1 :

ABC un triangle équilatéral direct de côté 5.

$\vec{u} = 2\,\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$

Déterminez $\vec{u} \cdot \vec{v}$

« direct » signifie *« en suivant le sens trigo ».*

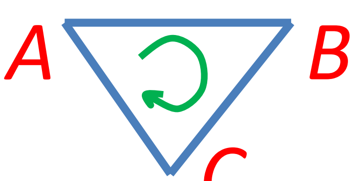
Exercice 1 :

ABC un triangle équilatéral direct de côté 5.

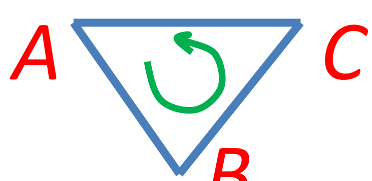
$\vec{u} = 2\,\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$

Déterminez $\vec{u} \cdot \vec{v}$

« direct » signifie *« en suivant le sens trigo ».*



ABC indirect



ABC direct

$\vec{u} = 2\,\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$

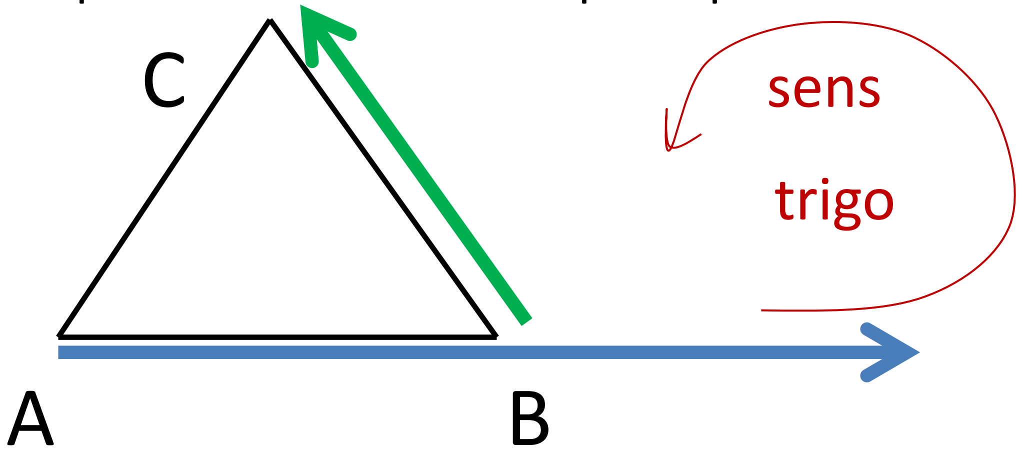
$$||\vec{u}|| = 2\,AB = 2 \times 5 = 10$$

$$||\vec{v}|| = AB = 5$$

$$(\vec{u}\,;\vec{v}) = \dots\ ?$$

le 1[er] vecteur par rotation doit aller sur le 2ème

je déplace l'un des vecteurs pour qu'ils aient la même origine



$\vec{u} = 2\,\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$

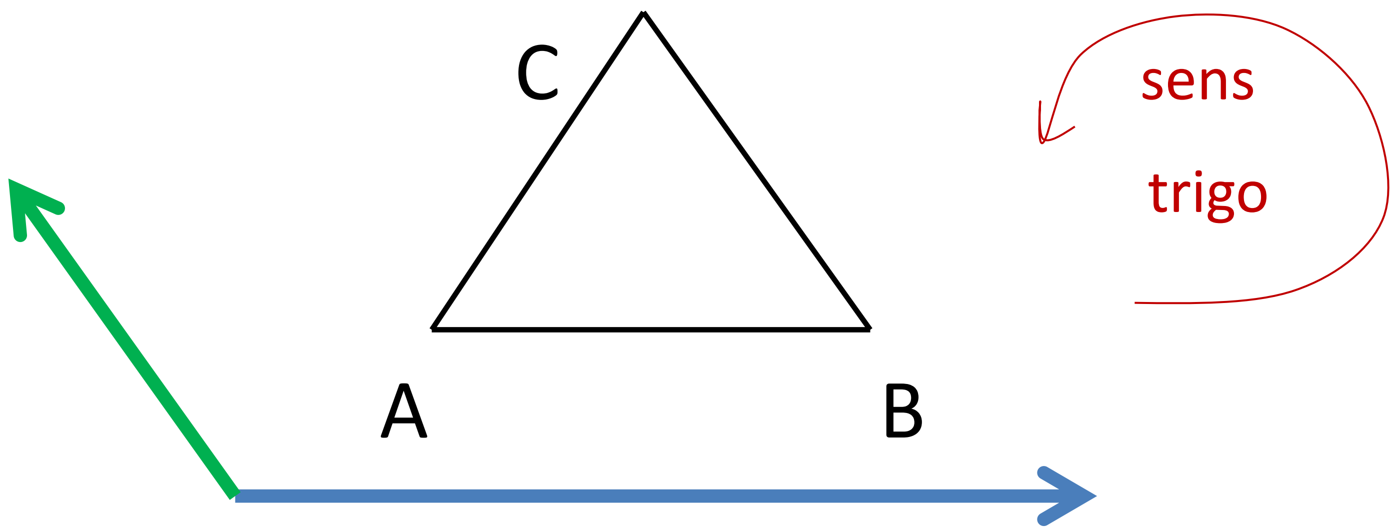
$$||\vec{u}|| = 2\,AB = 2 \times 5 = 10$$

$$||\vec{v}|| = AB = 5$$

$$(\vec{u}\,;\vec{v}) = \dots ?$$

le 1er vecteur par rotation doit aller sur le 2ème

je déplace l'un des vecteurs pour qu'ils aient la même origine



$\vec{u} = 2\,\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$

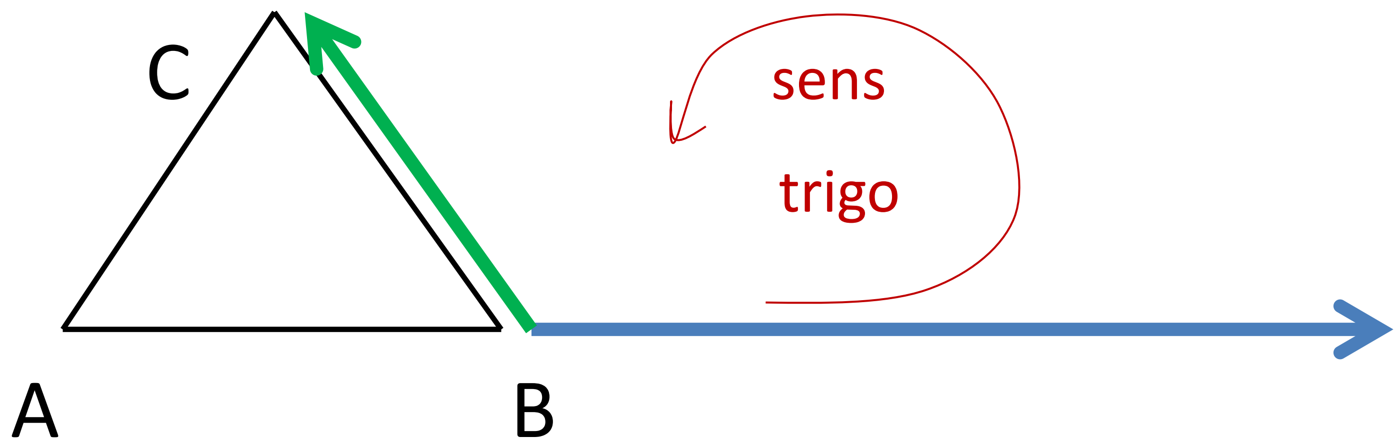
$||\vec{u}|| = 2\,AB = 2 \times 5 = 10$

$||\vec{v}|| = AB = 5$

$(\vec{u}\,;\vec{v}) = \ldots\,?$

le 1er vecteur par rotation doit aller sur le 2ème

je déplace l'un des vecteurs pour qu'ils aient la même origine



$\vec{u} = 2\,\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$

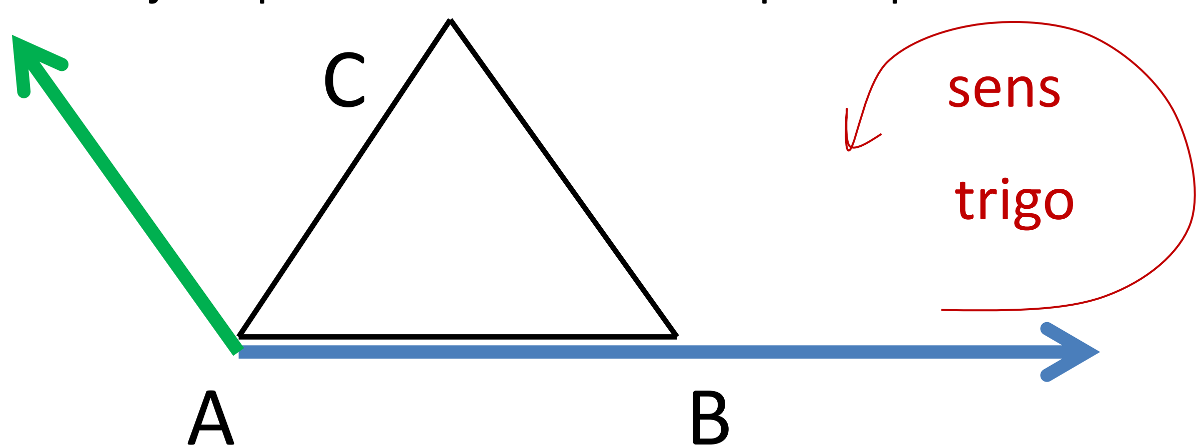
$||\vec{u}|| = 2\,AB = 2 \times 5 = 10$

$||\vec{v}|| = AB = 5$

$(\vec{u}\,;\vec{v}) = \ldots\,?$

le 1er vecteur par rotation doit aller sur le 2ème

je déplace l’un des vecteurs pour qu’ils aient la même origine

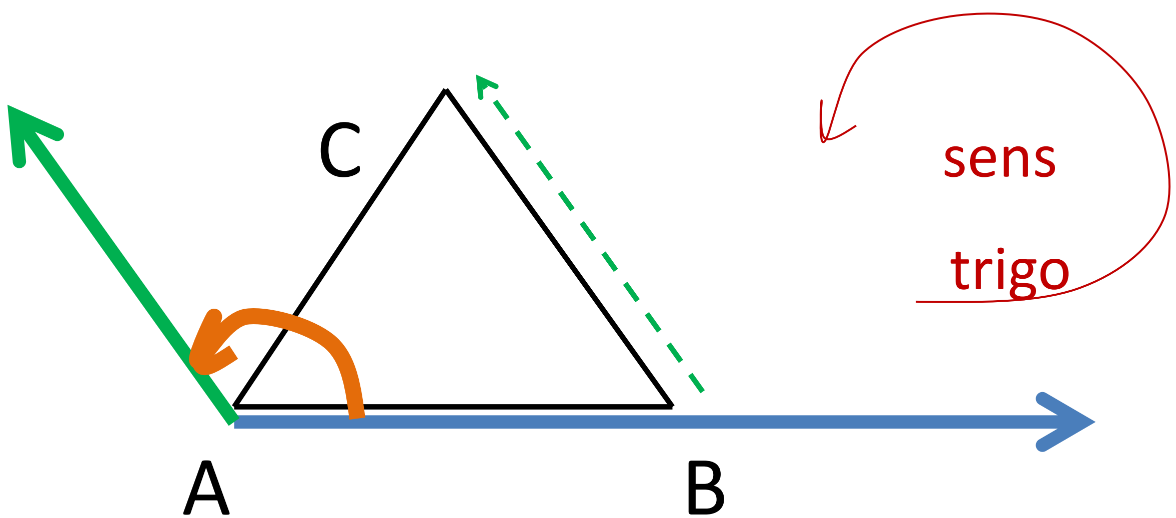


$\vec{u} = 2\,\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$

$$||\vec{u}|| = 2\,AB = 2 \times 5 = 10$$

$$||\vec{v}|| = AB = 5$$

$$(\vec{u}\,;\vec{v}) = \ldots ?$$

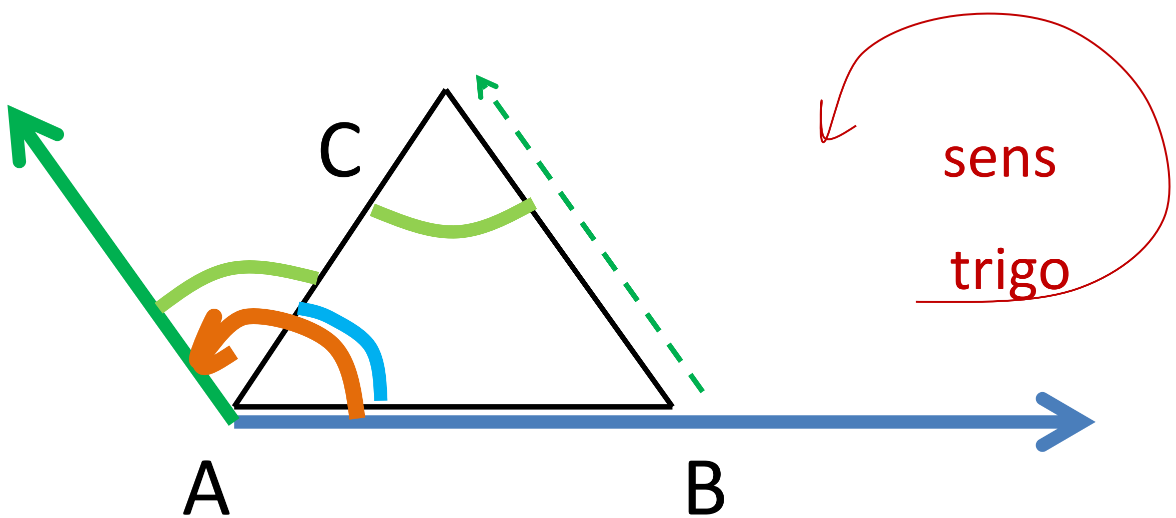


$\vec{u} = 2\,\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$

$$||\vec{u}|| = 2\,AB = 2 \times 5 = 10$$

$$||\vec{v}|| = AB = 5$$

$$(\vec{u}\,;\vec{v}) = \pi/3 + \pi/3 = \mathbf{2\pi/3}$$

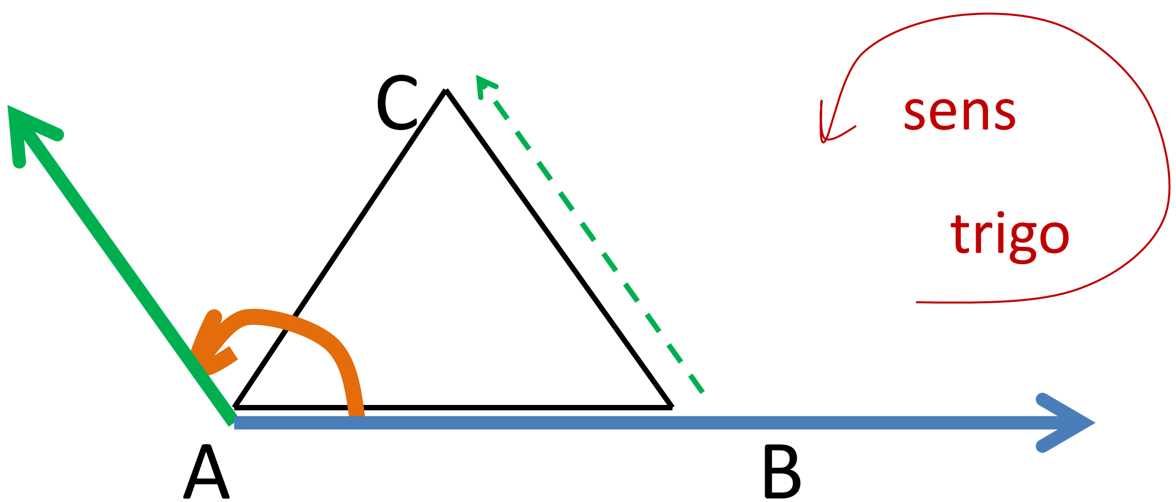


$\vec{u} = 2\,\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})$

$= 10 \times 5 \times \cos \mathbf{2\pi/3}$

$= 10 \times 5 \times (\ \dots ?\ )$

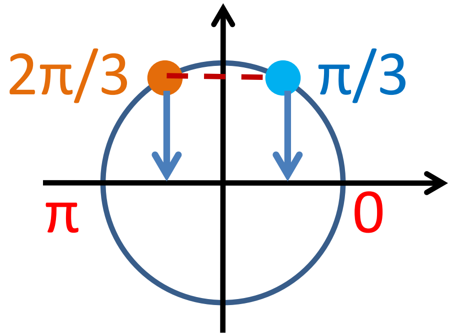


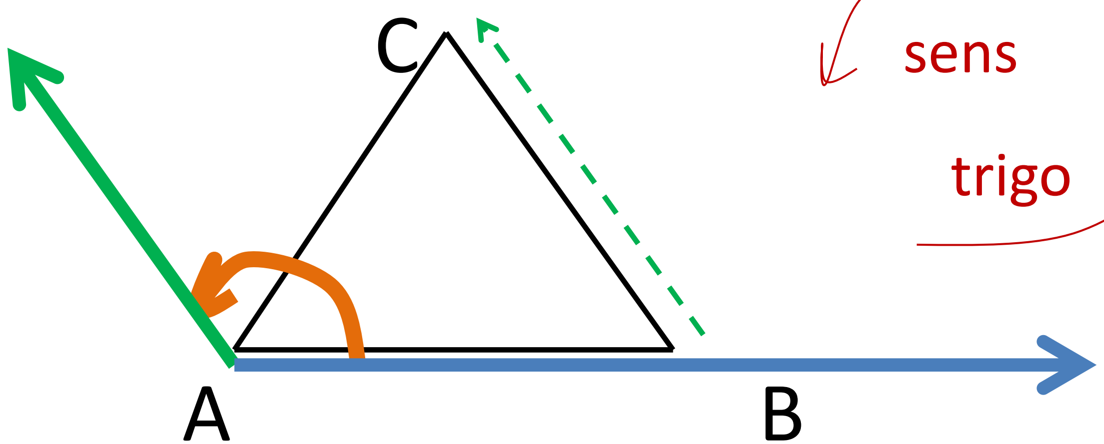
$\vec{u} = 2\,\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})$

$= 10 \times 5 \times \cos 2\pi/3$

$= 10 \times 5 \times (-\cos \pi/3)$





sens

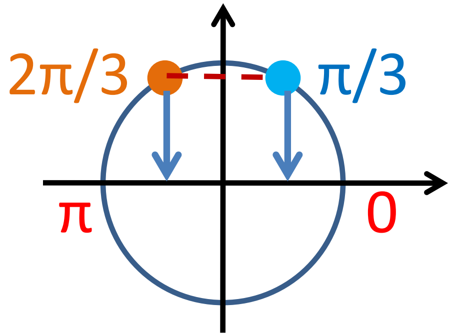
trigo

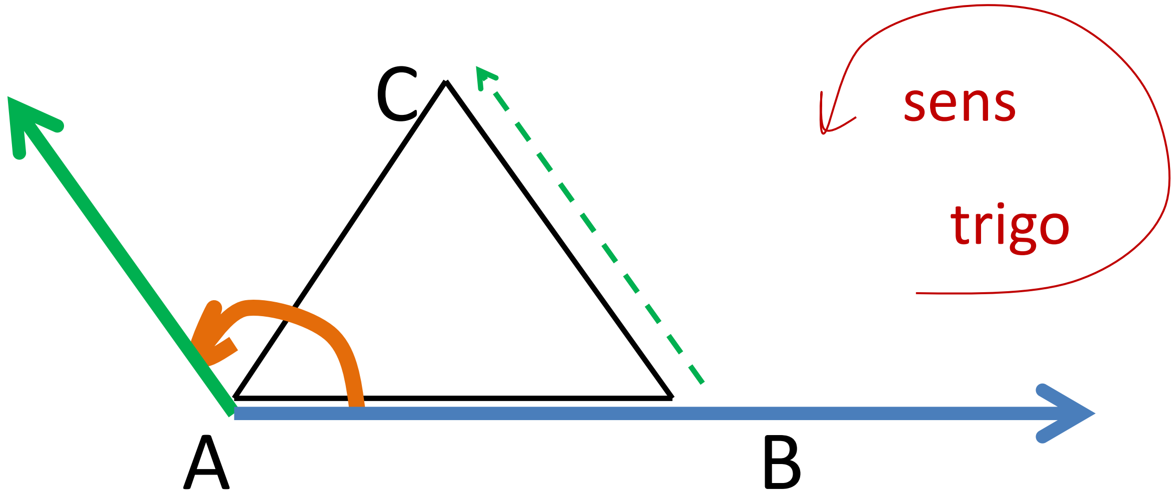
$\vec{u} = 2\,\vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{BC}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})$$

$$= 10 \times 5 \times \cos \mathbf{2\pi/3}$$

$$= 10 \times 5 \times (-1/2) = \mathbf{-25}$$





Exercice 2

ABCD est un carré de côté 2.

Déterminez

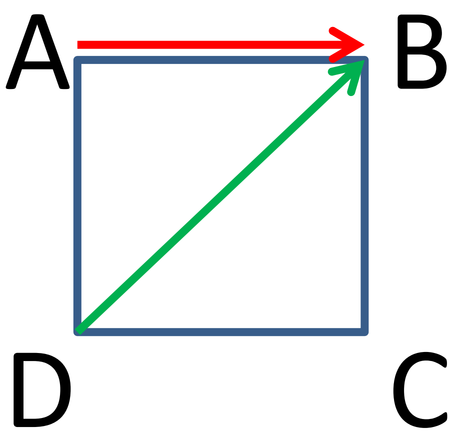
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD}$

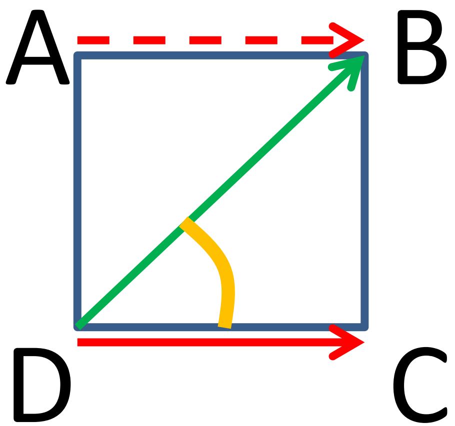
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$



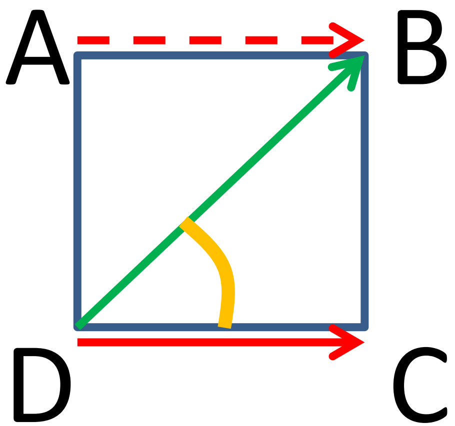
carré de côté 2

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB}$



carré de côté 2

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB} = AB \times DB \times \cos(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{DB})$$



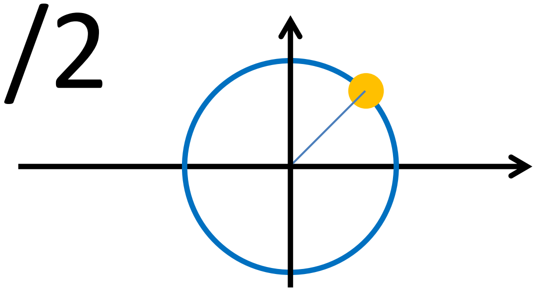
carré de côté 2

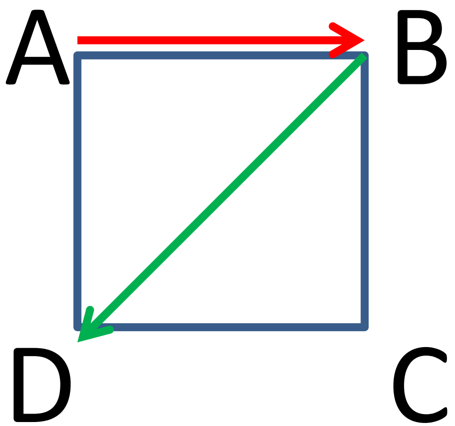
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB} = AB \times DB \times \cos(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{DB})$$

$$= 2 \times 2\sqrt{2} \times \cos \pi/4$$

$$= 2 \times 2\sqrt{2} \times (\sqrt{2})/2$$

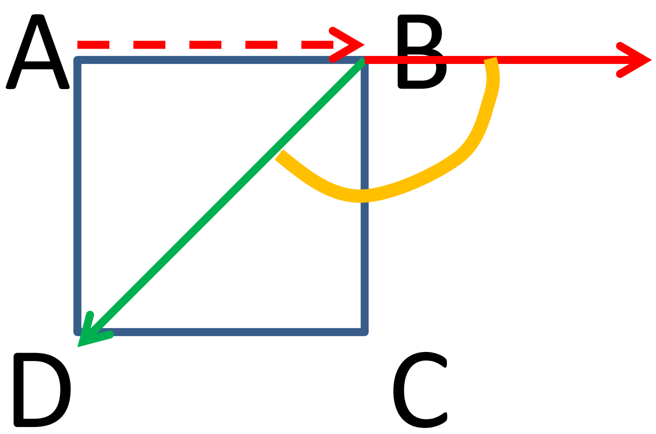
$$= 4$$





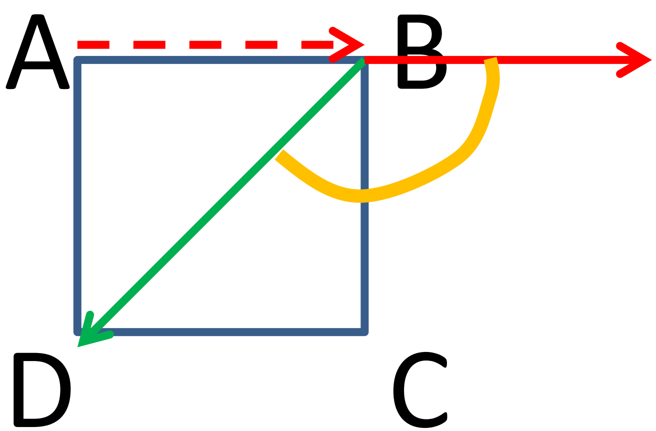
carré de côté 2

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$



carré de côté 2

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = AB \times BD \times \cos(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{BD})$$



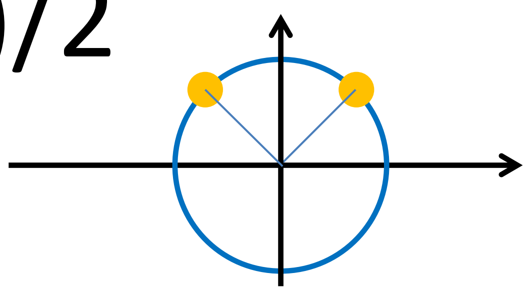
carré de côté 2

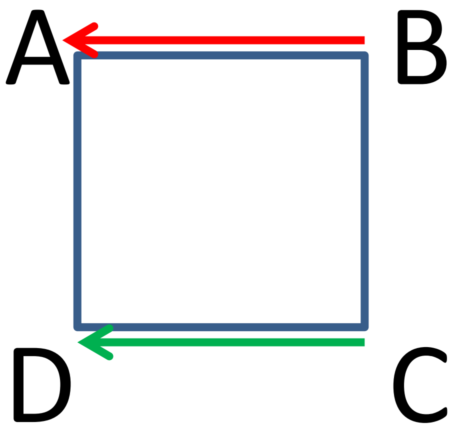
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = AB \times BD \times \cos(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{BD})$$

$$= 2 \times 2\sqrt{2} \times \cos 3\pi/4$$

$$= 2 \times 2\sqrt{2} \times (-\sqrt{2})/2$$

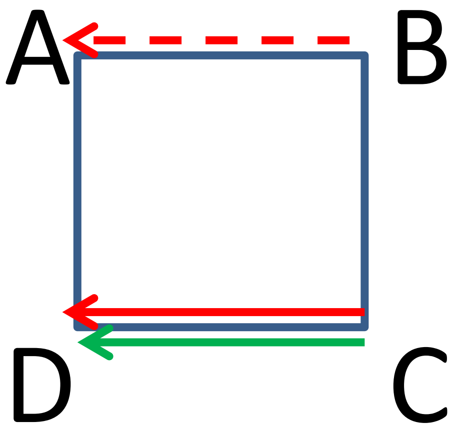
$$= -4$$





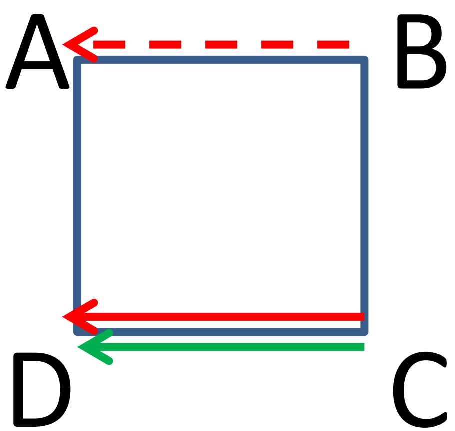
carré de côté 2

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD}$$



carré de côté 2

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} = BA \times CD \times \cos(\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{CD})$$



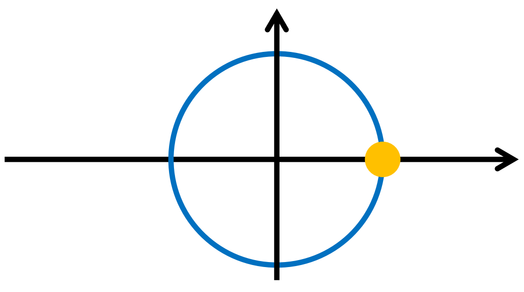
carré de côté 2

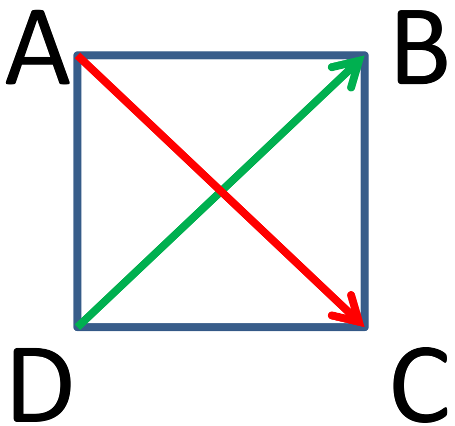
$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} = BA \times CD \times \cos(\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{CD})$$

$$= 2 \times 2 \times \cos 0$$

$$= 2 \times 2 \times 1$$

$$= 4$$

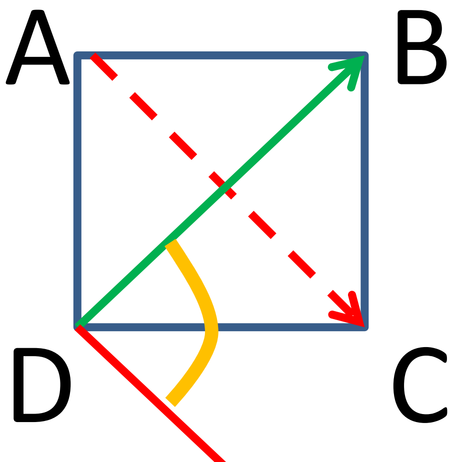




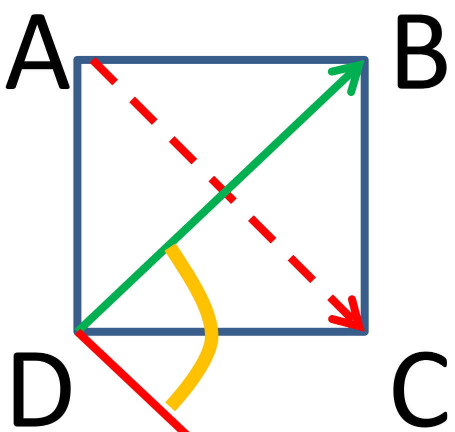
carré de côté 2

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$$

carré de côté 2



$$\overrightarrow{AC} \, . \, \overrightarrow{DB} = AC \times DB \times \cos \left(\overrightarrow{AC} \, ; \, \overrightarrow{DB} \right)$$



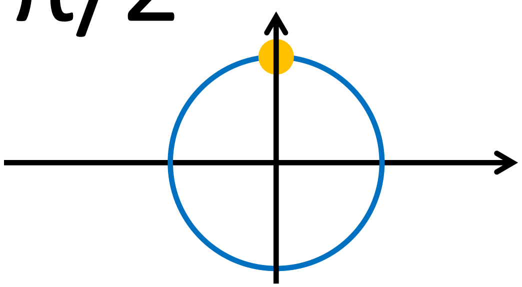
carré de côté 2

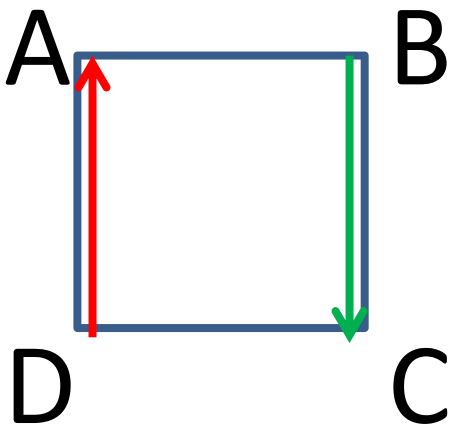
$$\overrightarrow{AC} \,.\, \overrightarrow{DB} = AC \times DB \times \cos\left(\overrightarrow{AC} \,;\, \overrightarrow{DB}\right)$$

$$= 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \cos \pi/2$$

$$= 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times 0$$

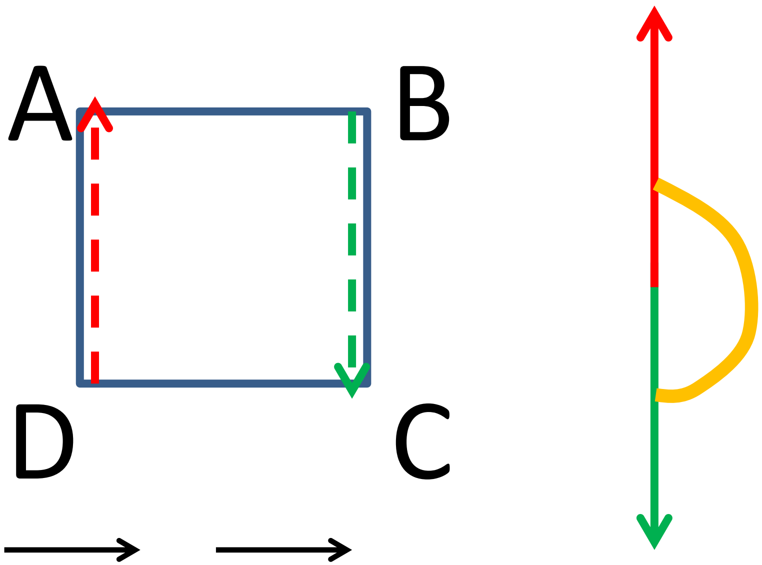
$$= 0$$





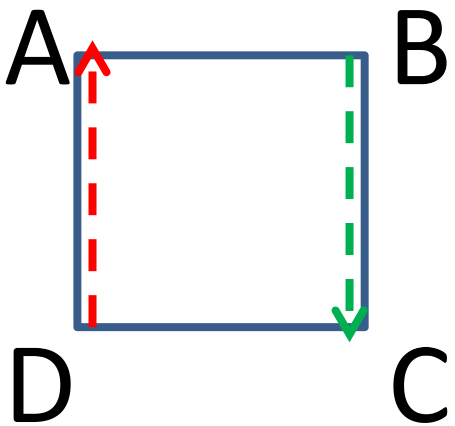
carré de côté 2

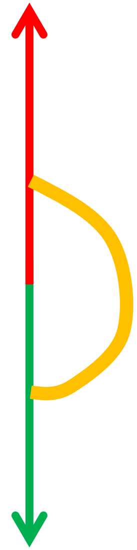
$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$



carré de côté 2

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = BC \times AD \times \cos(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{AD})$$





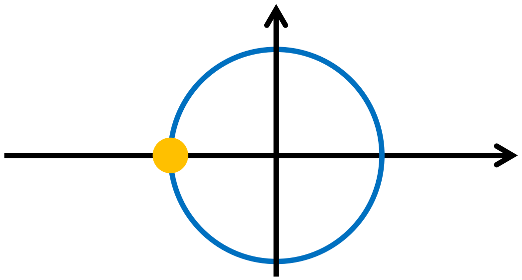
carré de côté 2

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = BC \times AD \times \cos(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{AD})$$

$$= 2 \times 2 \times \cos \pi$$

$$= 2 \times 2 \times (-1)$$

$$= -4$$



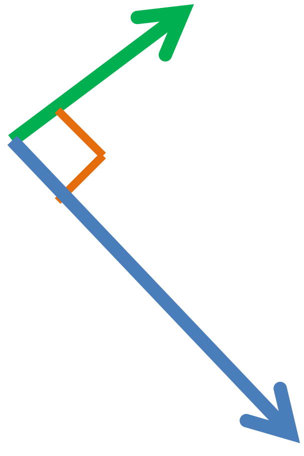
chapitre 10 **Produit scalaire**

I Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et nommé « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ » et est le réel $\boxed{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u} ; \vec{v})}$

II Propriétés

1°) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux



chapitre 10 **Produit scalaire**

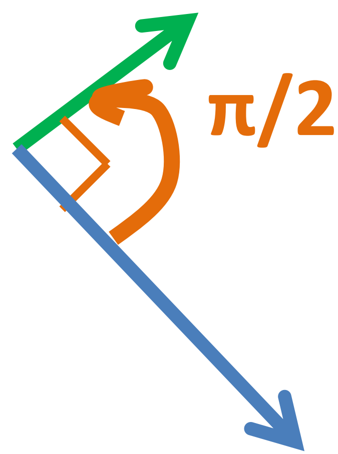
I Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et nommé « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ »

et est le réel $\boxed{||\,\vec{u}\,|| \times ||\,\vec{v}\,|| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})}$

II Propriétés

1°) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux



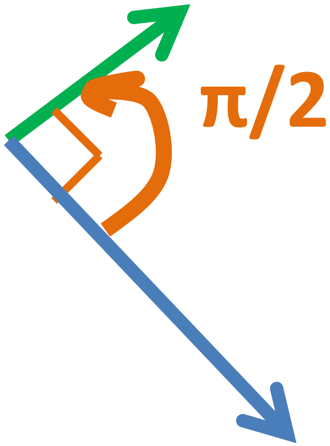
chapitre 10 **Produit scalaire**

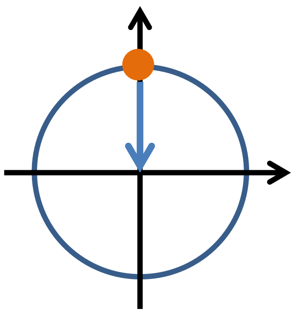
I Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et nommé « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ » et est le réel $\boxed{|| \vec{u} || \times || \vec{v} || \times \cos (\vec{u} ; \vec{v})}$

II Propriétés

1°) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux





chapitre 10 **Produit scalaire**

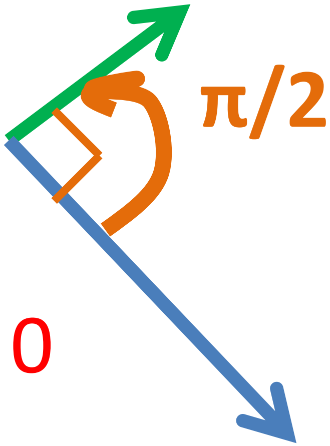
I Définition

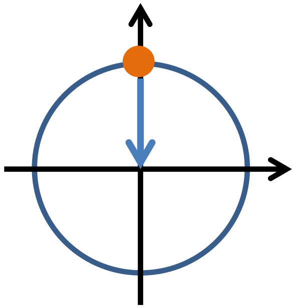
Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et nommé « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ » et est le réel $\boxed{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})}$

II Propriétés

1°) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times 0 = 0$





chapitre 10 **Produit scalaire**

I Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et nommé « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ » et est le réel $\boxed{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u} ; \vec{v})}$

II Propriétés

1°) $\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ orthogonaux} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$

2°) $\vec{v} \cdot \vec{u} = \ldots ?$

chapitre 10 **Produit scalaire**

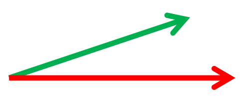
I Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et nommé « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ » et est le réel $\boxed{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u} ; \vec{v})}$

II Propriétés

1°) $\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ orthogonaux} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$

2°) $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$ $(\vec{v} ; \vec{u}) = \dots \quad (\vec{u} ; \vec{v})$



chapitre 10 **Produit scalaire**

I Définition

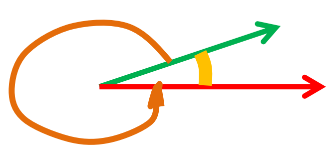
Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et nommé « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ » et est le réel $\boxed{\| \vec{u} \| \times \| \vec{v} \| \times \cos(\vec{u} \,;\, \vec{v})}$

II Propriétés

1°) $\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ orthogonaux} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$

2°) $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$

$(\vec{v} \,;\, \vec{u}) = 2\pi - (\vec{u} \,;\, \vec{v})$



chapitre 10 **Produit scalaire**

I Définition

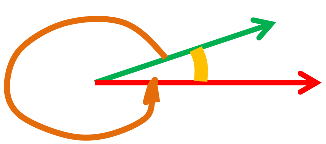
Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et nommé « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ » et est le réel $\boxed{\| \vec{u} \| \times \| \vec{v} \| \times \cos (\vec{u} ; \vec{v})}$

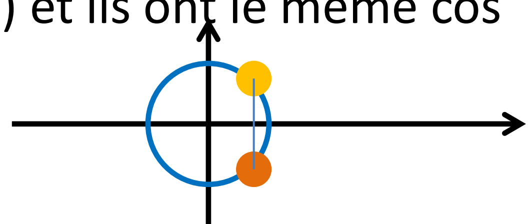
II Propriétés

1°) $\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ orthogonaux} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$

2°) $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$

$(\vec{v} ; \vec{u}) = 2\pi - (\vec{u} ; \vec{v})$ et ils ont le même cos





3°) $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) =$

$$3°)\ \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

comme dans les réels où $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

$3°)\ \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$

Démonstration :

$\vec{u} \cdot (k\vec{v}) =$

3°) $\vec{u} \, . \, (k \vec{v}) = (k \vec{u}) \, . \, \vec{v} = k \times (\vec{u} \, . \, \vec{v})$

Démonstration :

$\vec{u} \, . \, (k \vec{v}) = || \, \vec{u} \, || \times || \, k \vec{v} \, || \times \cos (\vec{u} \, ; k \vec{v})$

$=$

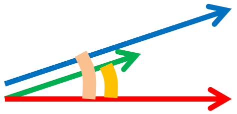
$3°)\ \vec{u}\,.\,(k\vec{v}) = (k\vec{u})\,.\,\vec{v} = k \times (\vec{u}\,.\,\vec{v})$

Démonstration :

$\vec{u}\,.\,(k\vec{v}) = ||\vec{u}|| \times ||k\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}\,;k\vec{v})$

$= ||\vec{u}|| \times k \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ si $k > 0$

$= k \times (\vec{u}\,.\,\vec{v})$



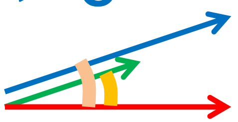
et = si $k < 0$

3°) $\vec{u} \,.\, (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \,.\, \vec{v} = k \times (\vec{u} \,.\, \vec{v})$

Démonstration :

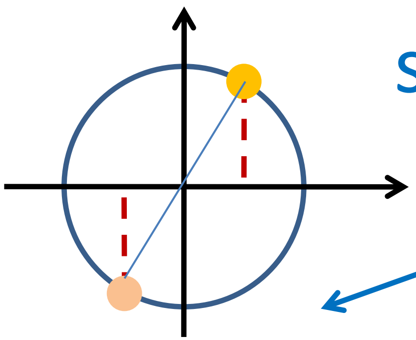
$\vec{u} \,.\, (k\vec{v}) = ||\vec{u}|| \times ||k\vec{v}|| \times \cos(\vec{u} \,;\, k\vec{v})$

$= ||\vec{u}|| \times k \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u} \,;\, \vec{v})$ si $k > 0$

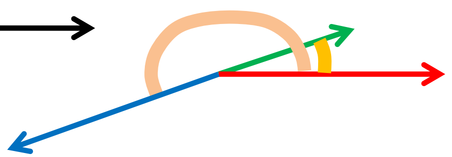


$= k \times (\vec{u} \,.\, \vec{v})$

et $= ||\vec{u}|| \times (-k) \times ||\vec{v}|| \times (-\cos(\vec{u} \,;\, \vec{v}))$



si $k < 0$



$= k \times (\vec{u} \,.\, \vec{v})$

Même méthode pour démontrer $(k\vec{u}) \,.\, \vec{v}$

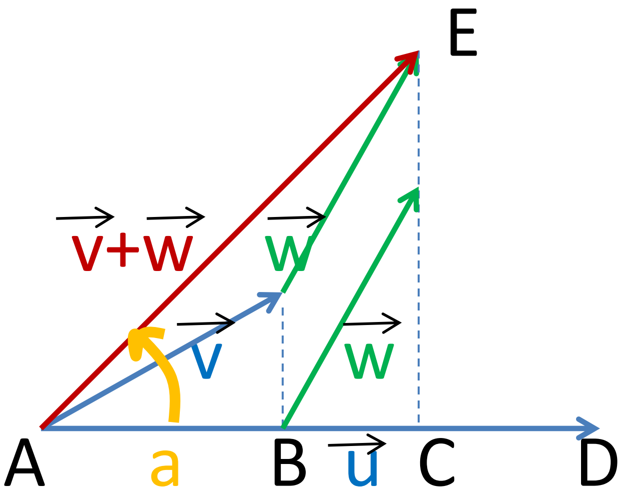
4°) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) =$

4°) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$

comme dans les réels où $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$

4°) $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w})$

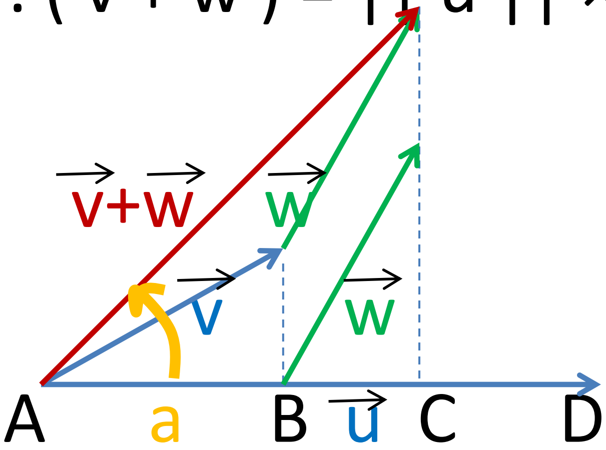
Démonstration :



$4°)\ \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$

Démonstration :

$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = ||\,\vec{u}\,|| \times ||\,\vec{v} + \vec{w}\,|| \times \cos(\vec{u}\,;\ \vec{v} + \vec{w})$

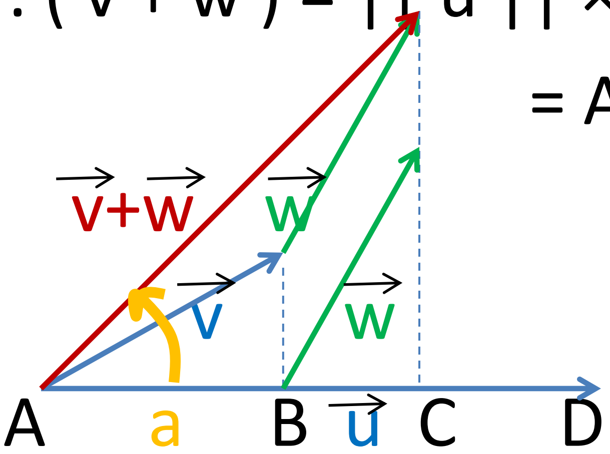


$4°)\ \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$

Démonstration :

$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v} + \vec{w}|| \times \cos(\vec{u} ; \vec{v} + \vec{w})$

$= AD \times AE \times \cos a =$



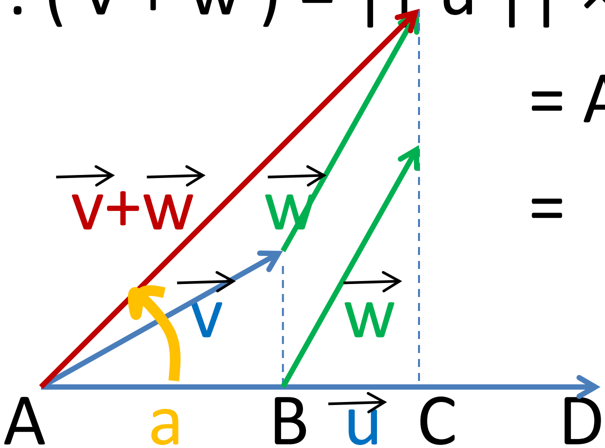
4°) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$

Démonstration :

$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = || \vec{u} || \times || \vec{v} + \vec{w} || \times \cos(\vec{u} \, ; \, \vec{v} + \vec{w})$

$= AD \times AE \times \cos a = AD \times AC$

$=$



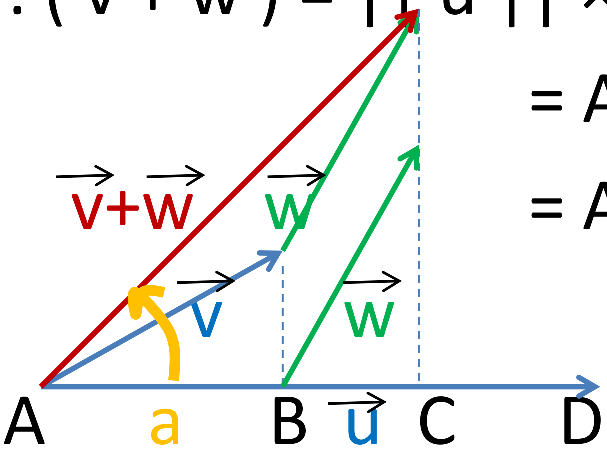
4°) $\vec{u} \,.\, (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \,.\, \vec{v}) + (\vec{u} \,.\, \vec{w})$

Démonstration :

$$\vec{u} \,.\, (\vec{v} + \vec{w}) = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v} + \vec{w}|| \times \cos(\vec{u}\,;\, \vec{v} + \vec{w})$$

$$= AD \times AE \times \cos a = AD \times AC$$

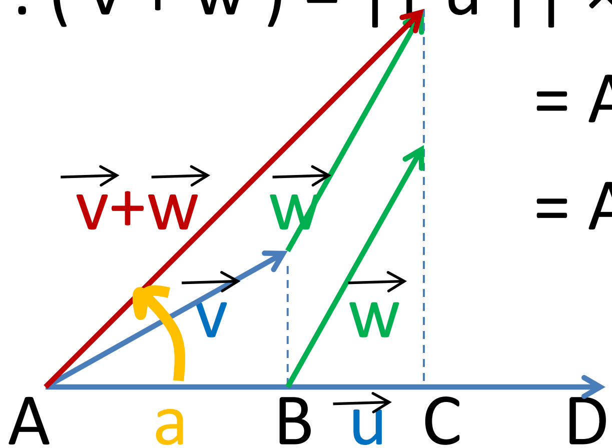
$$= AD \times (AB + BC) =$$



4°) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$

Démonstration :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v} + \vec{w}|| \times \cos(\vec{u} ; \vec{v} + \vec{w})$$



$$= AD \times AE \times \cos a = AD \times AC$$

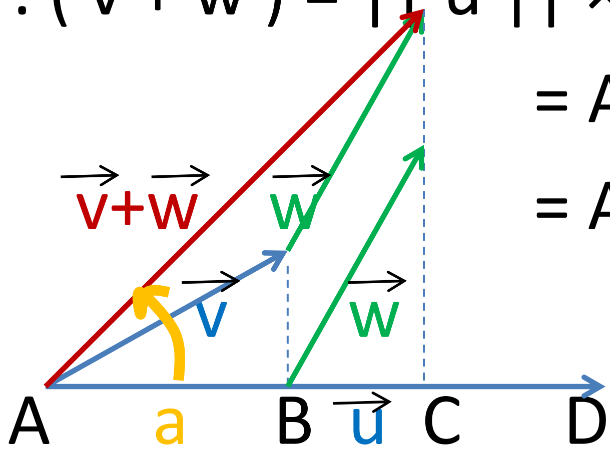
$$= AD \times (AB + BC) = AD \times AB + AD \times BC$$

$$=$$

4°) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$

Démonstration :

$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v} + \vec{w}|| \times \cos(\vec{u} ; \vec{v} + \vec{w})$



$= AD \times AE \times \cos a = AD \times AC$

$= AD \times (AB + BC) = AD \times AB + AD \times BC$

$= ||\vec{u}|| \times \quad ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u} ; \vec{v})$

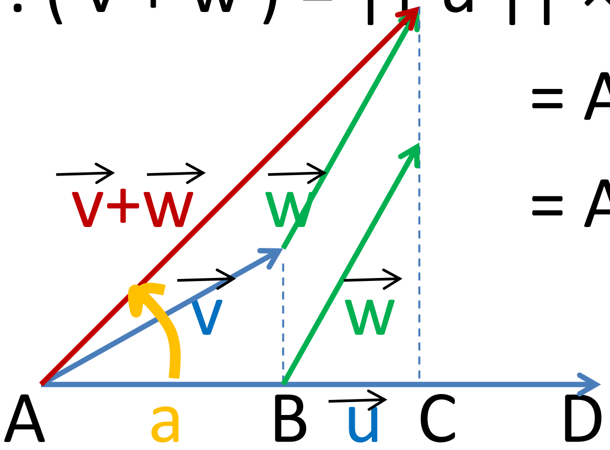
$+ \, ||\vec{u}|| \times \quad ||\vec{w}|| \times \cos(\vec{u} ; \vec{w})$

$=$

$4°)\ \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$

Démonstration :

$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v} + \vec{w}|| \times \cos(\vec{u} ; \vec{v} + \vec{w})$



$= AD \times AE \times \cos a = AD \times AC$

$= AD \times (AB + BC) = AD \times AB + AD \times BC$

$= ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u} ; \vec{v})$

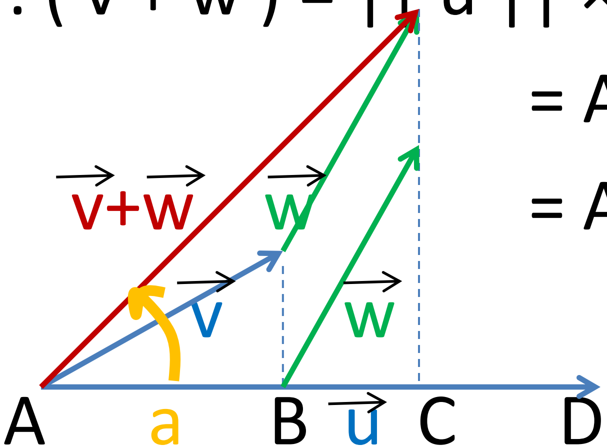
$+ ||\vec{u}|| \times ||\vec{w}|| \times \cos(\vec{u} ; \vec{w})$

$= (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$

4°) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$

Démonstration :

$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v} + \vec{w}|| \times \cos(\vec{u} \,;\, \vec{v} + \vec{w})$



$= AD \times AE \times \cos a = AD \times AC$

$= AD \times (AB + BC) = AD \times AB + AD \times BC$

$= ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u} \,;\, \vec{v})$

$+ ||\vec{u}|| \times ||\vec{w}|| \times \cos(\vec{u} \,;\, \vec{w})$

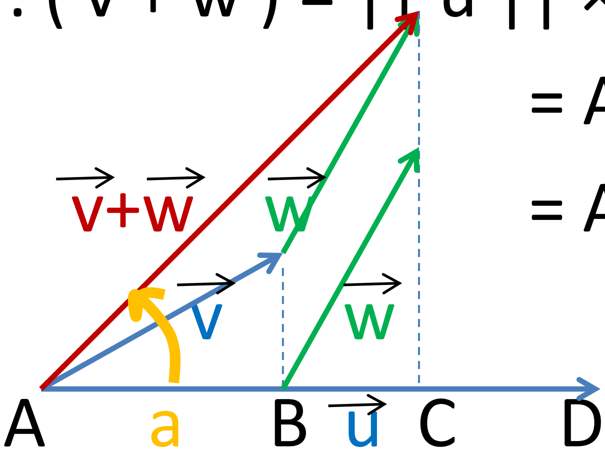
$= (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$

5°) $\vec{u} \cdot \vec{u} =$

4°) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$

Démonstration :

$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v} + \vec{w}|| \times \cos(\vec{u} \,;\, \vec{v} + \vec{w})$



$= AD \times AE \times \cos a = AD \times AC$

$= AD \times (AB + BC) = AD \times AB + AD \times BC$

$= ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u} \,;\, \vec{v})$

$+ ||\vec{u}|| \times ||\vec{w}|| \times \cos(\vec{u} \,;\, \vec{w})$

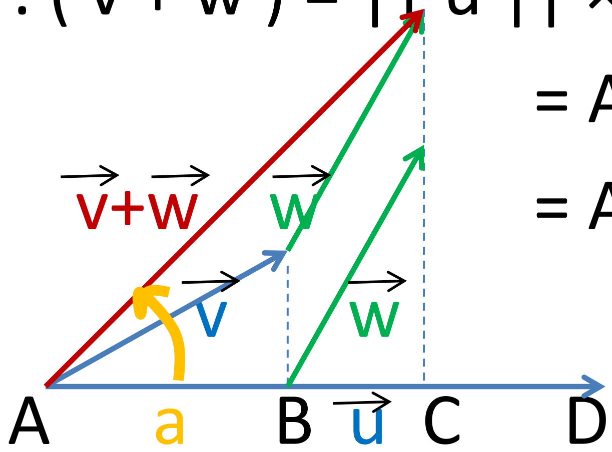
$= (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$

5°) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^{\,2}$ appelé « carré scalaire de $\vec{u}$ »

4°) $\vec{u} \,.\, (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \,.\, \vec{v}) + (\vec{u} \,.\, \vec{w})$

Démonstration :

$\vec{u} \,.\, (\vec{v} + \vec{w}) = ||\,\vec{u}\,|| \times ||\,\vec{v} + \vec{w}\,|| \times \cos(\vec{u} \,;\, \vec{v} + \vec{w})$



$= AD \times AE \times \cos a = AD \times AC$

$= AD \times (AB + BC) = AD \times AB + AD \times BC$

$= ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u} \,;\, \vec{v})$

$+ ||\vec{u}|| \times ||\vec{w}|| \times \cos(\vec{u} \,;\, \vec{w})$

$= (\vec{u} \,.\, \vec{v}) + (\vec{u} \,.\, \vec{w})$

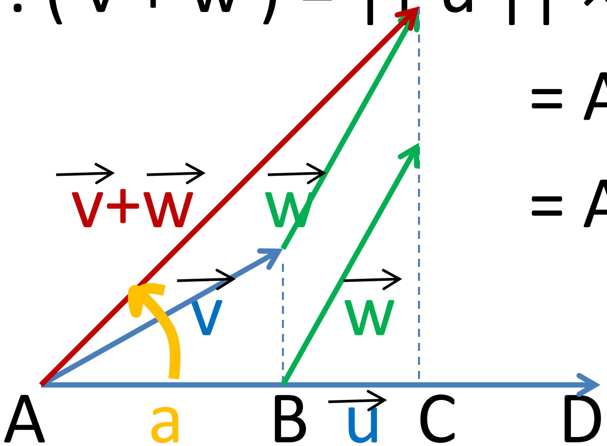
5°) $\vec{u} \,.\, \vec{u} = \vec{u}^{\,2}$ appelé « carré scalaire de $\vec{u}$ »

$\vec{u} \,.\, \vec{u} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{u}|| \times \cos(\vec{u} \,;\, \vec{u})$

4°) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$

Démonstration :

$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v} + \vec{w}|| \times \cos(\vec{u} ; \vec{v} + \vec{w})$



$= AD \times AE \times \cos a = AD \times AC$

$= AD \times (AB + BC) = AD \times AB + AD \times BC$

$= ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u} ; \vec{v})$

$+ ||\vec{u}|| \times ||\vec{w}|| \times \cos(\vec{u} ; \vec{w})$

$= (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$

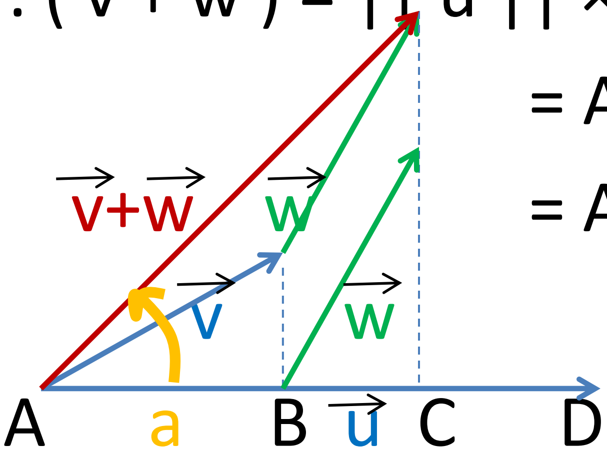
5°) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^{\,2}$ appelé « carré scalaire de $\vec{u}$ »

$\vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{u}|| \times \cos(\vec{u} ; \vec{u}) = ||\vec{u}||^2 \times \cos 0 = ||\vec{u}||^2$

4°) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$

Démonstration :

$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = || \vec{u} || \times || \vec{v} + \vec{w} || \times \cos (\vec{u} \, ; \, \vec{v} + \vec{w})$



$= AD \times AE \times \cos a = AD \times AC$

$= AD \times (AB + BC) = AD \times AB + AD \times BC$

$= || \vec{u} || \times || \vec{v} || \times \cos(\vec{u} \, ; \vec{v})$

$+ || \vec{u} || \times || \vec{w} || \times \cos(\vec{u} \, ; \vec{w})$

$= (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$

5°) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^{\,2}$ appelé « carré scalaire de $\vec{u}$ »

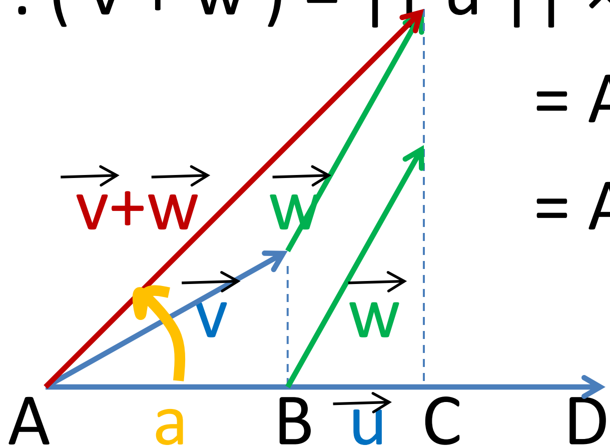
$\vec{u} \cdot \vec{u} = || \vec{u} || \times || \vec{u} || \times \cos(\vec{u} \, ; \vec{u}) = || \vec{u} ||^2 \times \cos 0 = || \vec{u} ||^2$

$\vec{u}^{\,2} = || \vec{u} ||^2$

4°) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$

Démonstration :

$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v} + \vec{w}|| \times \cos(\vec{u} \,;\, \vec{v} + \vec{w})$



$= AD \times AE \times \cos a = AD \times AC$

$= AD \times (AB + BC) = AD{\times}AB + AD{\times}BC$

$= ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u} \,;\, \vec{v})$

$+ ||\vec{u}|| \times ||\vec{w}|| \times \cos(\vec{u} \,;\, \vec{w})$

$= (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$

5°) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^{\,2}$ appelé « carré scalaire de $\vec{u}$ »

$\vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{u}|| \times \cos(\vec{u} \,;\, \vec{u}) = ||\vec{u}||^2 \times \cos 0 = ||\vec{u}||^2$

$\vec{u}^{\,2} = ||\vec{u}||^2$ carré *scalaire* carré *d'un réel*

6°) $(\vec{u} + \vec{v})^2 =$

6°) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} + 2 \times \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^{\,2}$

comme dans les réels où $(A + B)^2 = A^2 + 2A \times B + B^2$

6°) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} + 2 \times \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^{\,2}$

Démonstration :

$(\vec{u} + \vec{v})^2 =$

6°) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} + 2 \times \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^{\,2}$

Démonstration :

$(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{v})$ = etc…

6°) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} + 2 \times \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^{\,2}$

Démonstration :

$(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \text{etc...}$

7°) $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right)}$

3ème façon de calculer un produit scalaire !

Démonstration :

... =

$$6°)\ (\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} + 2\times\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^{\,2}$$

Démonstration :

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v})\,.\,(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\,.\,(\vec{u}+\vec{v}) + \vec{v}\,.\,(\vec{u}+\vec{v}) = \text{etc…}$$

$$7°)\ \boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = \tfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)}$$

Démonstration :

$$\tfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

$$= \ldots$$

$6°)\ (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} + 2 \times \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^{\,2}$

Démonstration :

$(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \text{etc...}$

$7°)\ \boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right)}$

Démonstration :

$\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^{\color{red}2} + \|\vec{v}\|^{\color{red}2} - \|\vec{u} - \vec{v}\|^{\color{red}2} \right)$

$= \frac{1}{2}\left(\vec{u}^{\,\color{green}2} + \vec{v}^{\,\color{green}2} - (\vec{u} - \vec{v})^{\color{green}2} \right)$

$= \ldots$

$^{\color{red}2}$ carré des réels

$^{\color{green}2}$ carré scalaire

$$6°)\ (\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} + 2\times\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^{\,2}$$

Démonstration :

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v})\,.\,(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\,.\,(\vec{u}+\vec{v}) + \vec{v}\,.\,(\vec{u}+\vec{v}) = \text{etc...}$$

$$7°)\ \boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = \tfrac{1}{2}\left(\,||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2\,\right)}$$

Démonstration :

$$\tfrac{1}{2}\left(\,||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2\,\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\vec{u}^{\,2} + \vec{v}^{\,2} - (\vec{u}-\vec{v})^2\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\vec{u}^{\,2} + \vec{v}^{\,2} - (\vec{u}^{\,2} - 2\times\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^{\,2})\right)$$

$$= \ldots$$

identité remarquable scalaire

$$6°)\ (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} + 2 \times \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^{\,2}$$

Démonstration :

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \text{etc...}$$

$$7°)\ \boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \tfrac{1}{2} \left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right)}$$

Démonstration :

$$\tfrac{1}{2} \left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right)$$

$$= \tfrac{1}{2} \left(\vec{u}^{\,2} + \vec{v}^{\,2} - (\vec{u} - \vec{v})^2 \right)$$

$$= \tfrac{1}{2} \left(\vec{u}^{\,2} + \vec{v}^{\,2} - (\vec{u}^{\,2} - 2 \times \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^{\,2}) \right)$$

$$= \tfrac{1}{2} \left(\vec{u}^{\,2} + \vec{v}^{\,2} - \vec{u}^{\,2} + 2 \times \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v}^{\,2} \right)$$

$$= \ldots$$

développement

6°) $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} + 2 \times \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^{\,2}$

Démonstration :

$(\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v})\,.\,(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\,.\,(\vec{u}+\vec{v}) + \vec{v}\,.\,(\vec{u}+\vec{v}) =$ etc…

7°) $\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 \right)}$

Démonstration :

$$\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{u}^{\,2} + \vec{v}^{\,2} - (\vec{u}-\vec{v})^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{u}^{\,2} + \vec{v}^{\,2} - (\vec{u}^{\,2} - 2 \times \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^{\,2}) \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{u}^{\,2} + \vec{v}^{\,2} - \vec{u}^{\,2} + 2 \times \vec{u}\,.\,\vec{v} - \vec{v}^{\,2} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 \times \vec{u}\,.\,\vec{v} \right) = \ldots$$

$$6°)\ (\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} + 2\times\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^{\,2}$$

Démonstration :

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v}) + \vec{v}\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \text{etc...}$$

$$7°)\ \boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \tfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)}$$

Démonstration :

$$\tfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\vec{u}^{\,2} + \vec{v}^{\,2} - (\vec{u}-\vec{v})^2\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\vec{u}^{\,2} + \vec{v}^{\,2} - (\vec{u}^{\,2} - 2\times\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^{\,2})\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\vec{u}^{\,2} + \vec{v}^{\,2} - \vec{u}^{\,2} + 2\times\vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{v}^{\,2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(2\times\vec{u}\cdot\vec{v}\right) = \vec{u}\cdot\vec{v}$$