On a donc les **angles remarquables** :

x	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
cos x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
sin x	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

qui vont nous permettre, à partir de propriétés géométriques dans le cercle trigo, de les dupliquer et de trouver d'autres angles avec des cos et sin en valeurs exactes.

Duplication :

Le but n’est pas

de connaître par cœur les très nombreuses formules de duplication,

mais de prouver que l’on possède les …

Duplication :

Le but n'est pas

de connaître par cœur les très nombreuses formules de duplication,

mais de prouver que l'on possède les connaissances sur la trigonométrie,

donc de connaître …

Duplication :

Le but n’est pas

de connaître par cœur les très nombreuses formules de duplication,

mais de prouver que l’on possède les connaissances sur la trigonométrie,

donc de connaître le cercle trigonométrique

qui permet grâce aux …

Duplication :

Le but n’est pas

de connaître par cœur les très nombreuses formules de duplication,

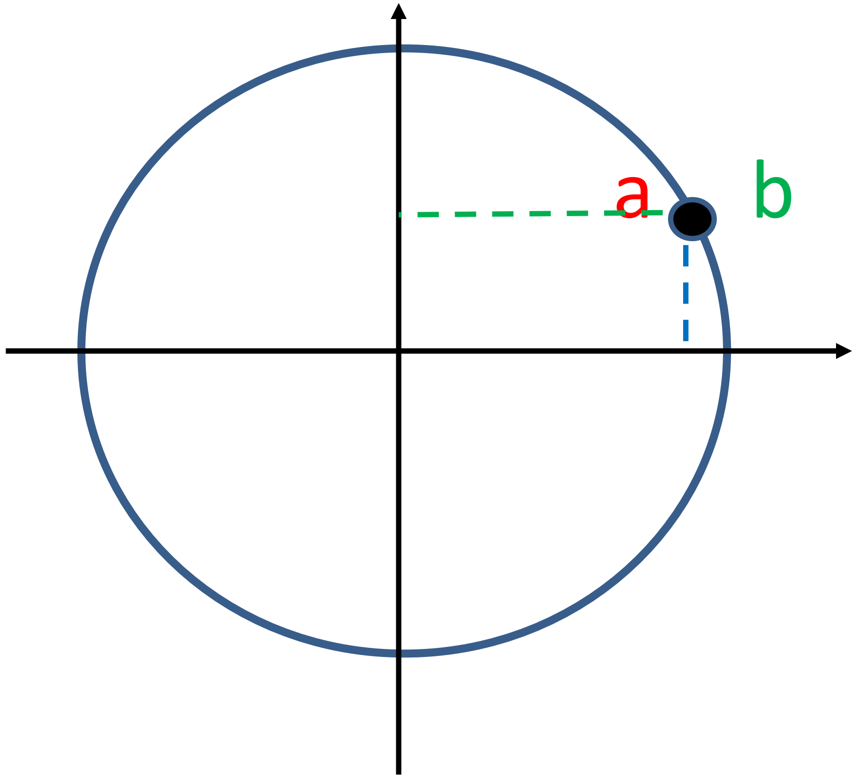
mais de prouver que l’on possède les connaissances sur la trigonométrie,

donc de connaître le cercle trigonométrique

qui permet grâce aux propriétés géométriques de trouver la duplication qui débloque et résout l’exercice posé.

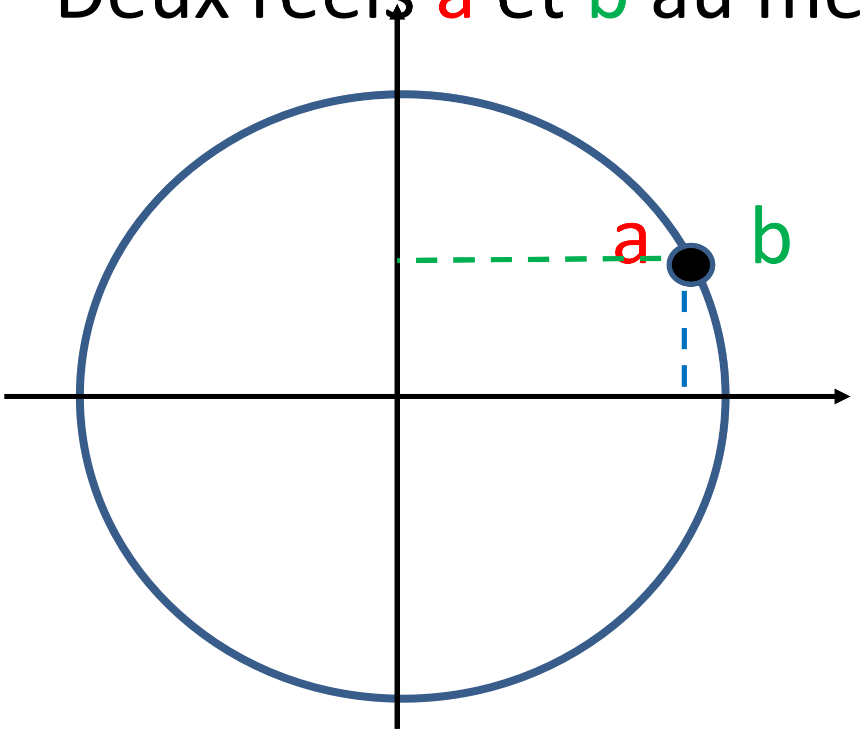
Duplication :

Deux réels a et b au même endroit, mais différents :



Duplication :

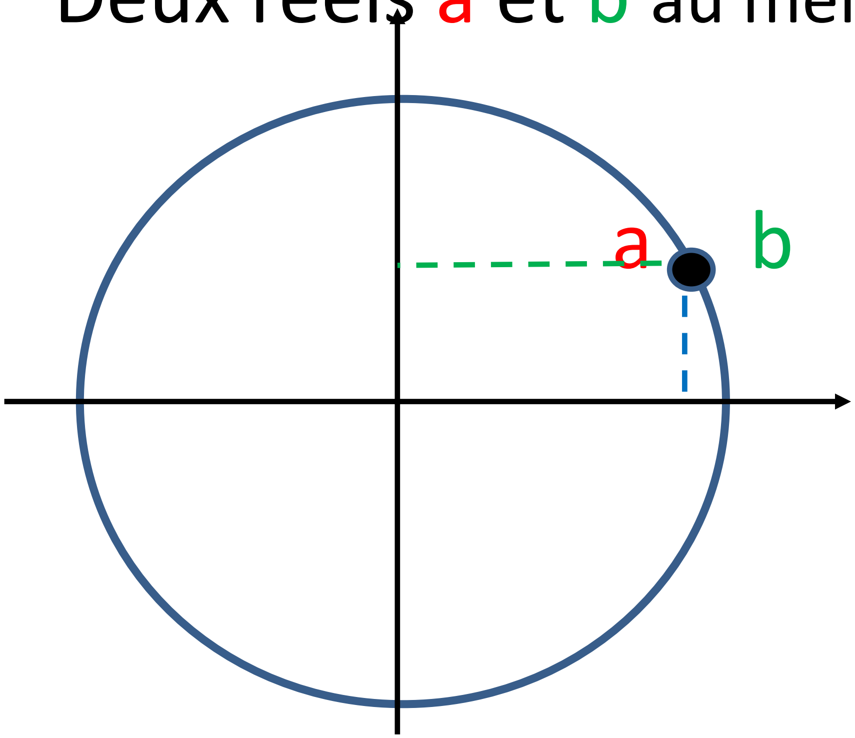
Deux réels a et b au même endroit, mais différents :



Si les réels a et b sont au même endroit, c'est qu'ils sont séparés …

Duplication :

Deux réels a et b au même endroit, mais différents :

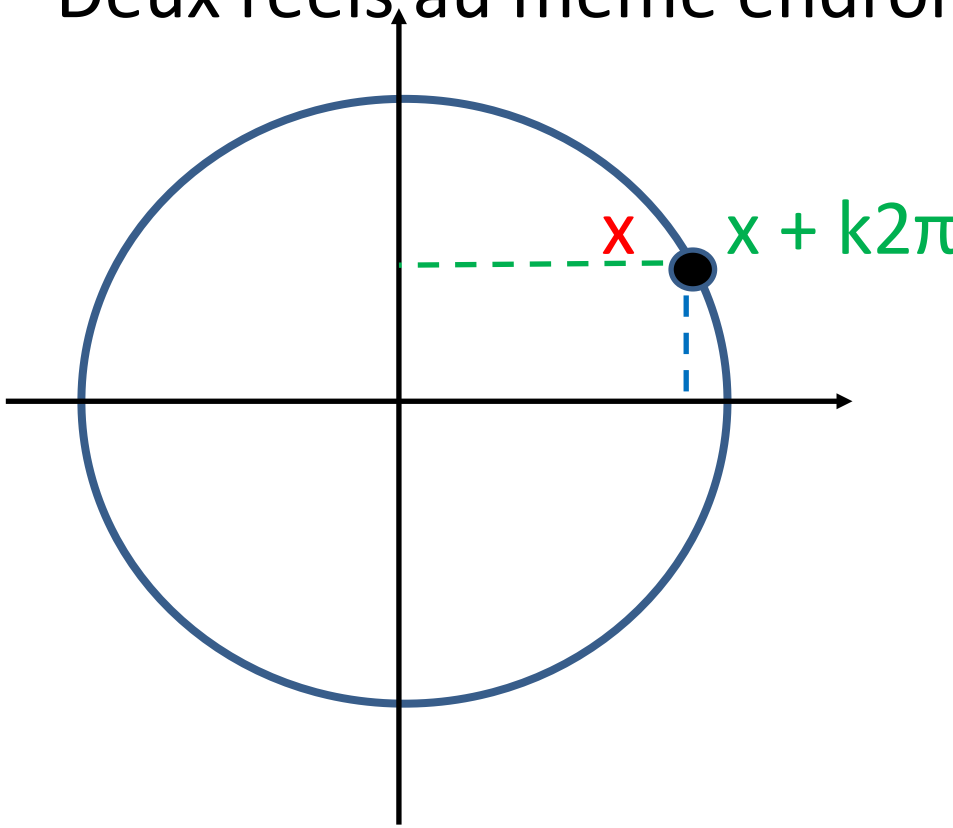


Si les réels a et b sont au même endroit, c'est qu'ils sont séparés d'un nombre entier k de tours :

$b = a + k2\pi$

Duplication :

Deux réels au même endroit, mais différents :



$\cos(x + k2\pi) = \dots$

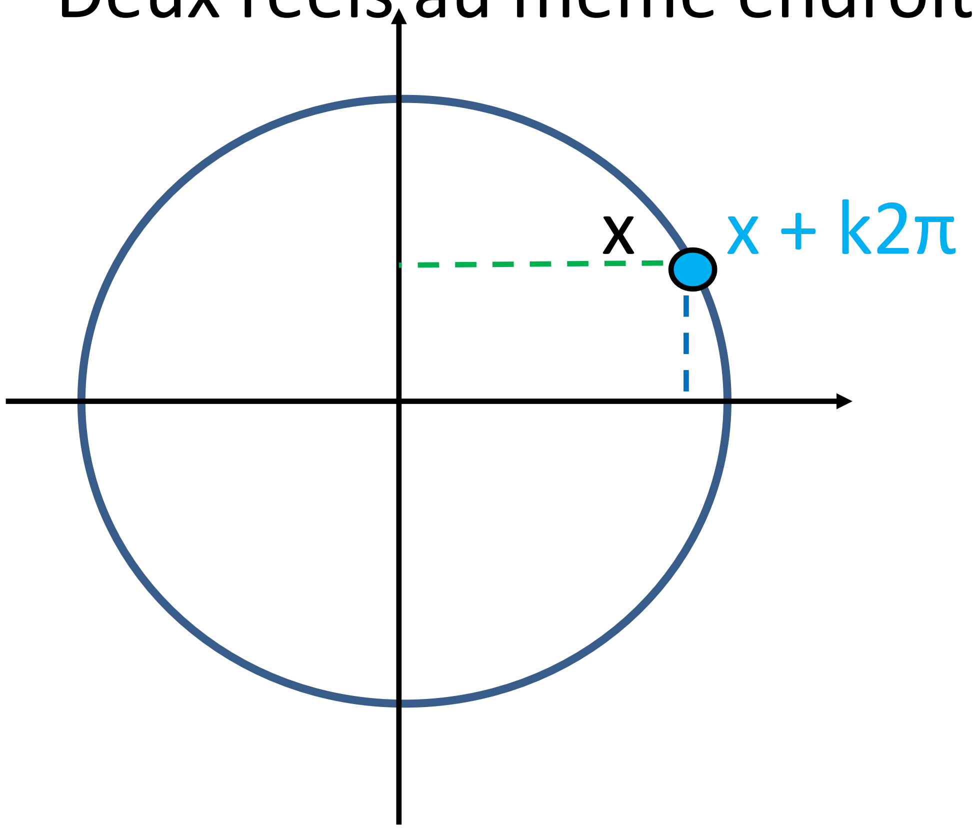
$\sin(x + k2\pi) = \dots$

Si les réels a et b sont au même endroit, c'est qu'ils sont séparés d'un nombre entier k de tours :

$b = a + k2\pi$

Duplication :

Deux réels au même endroit, mais différents :



$$\cos(x + k2\pi) = \cos x$$
$$\sin(x + k2\pi) = \sin x$$

k est un nombre entier

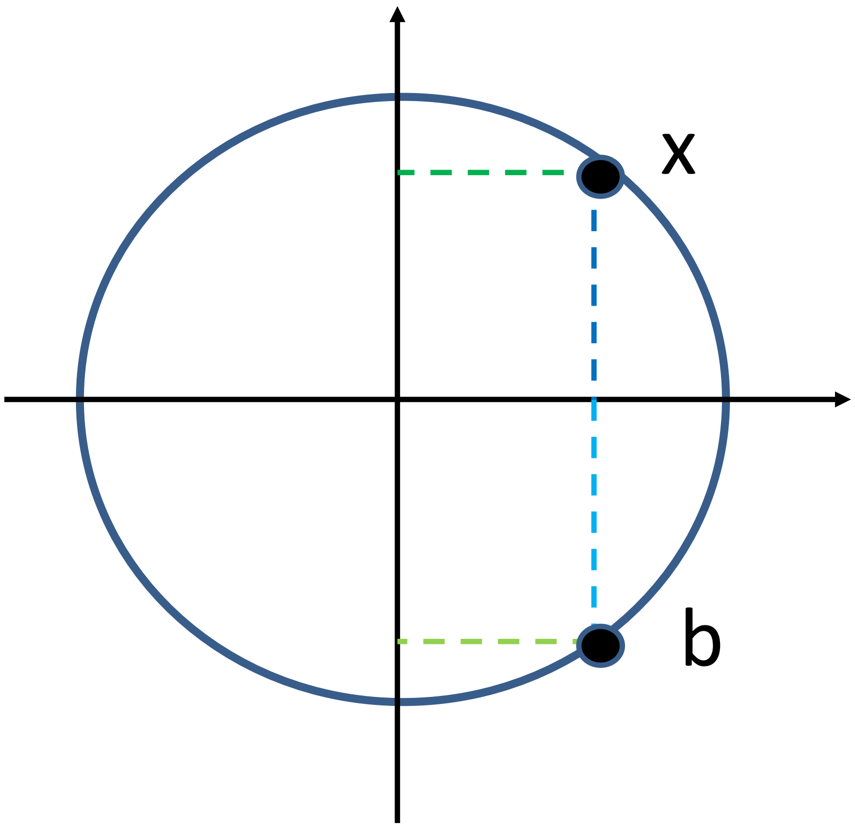
(positif ou négatif)

+ k2π est une formule classique de trigo,

donc il est accepté de ne pas toujours préciser

que k est un entier.

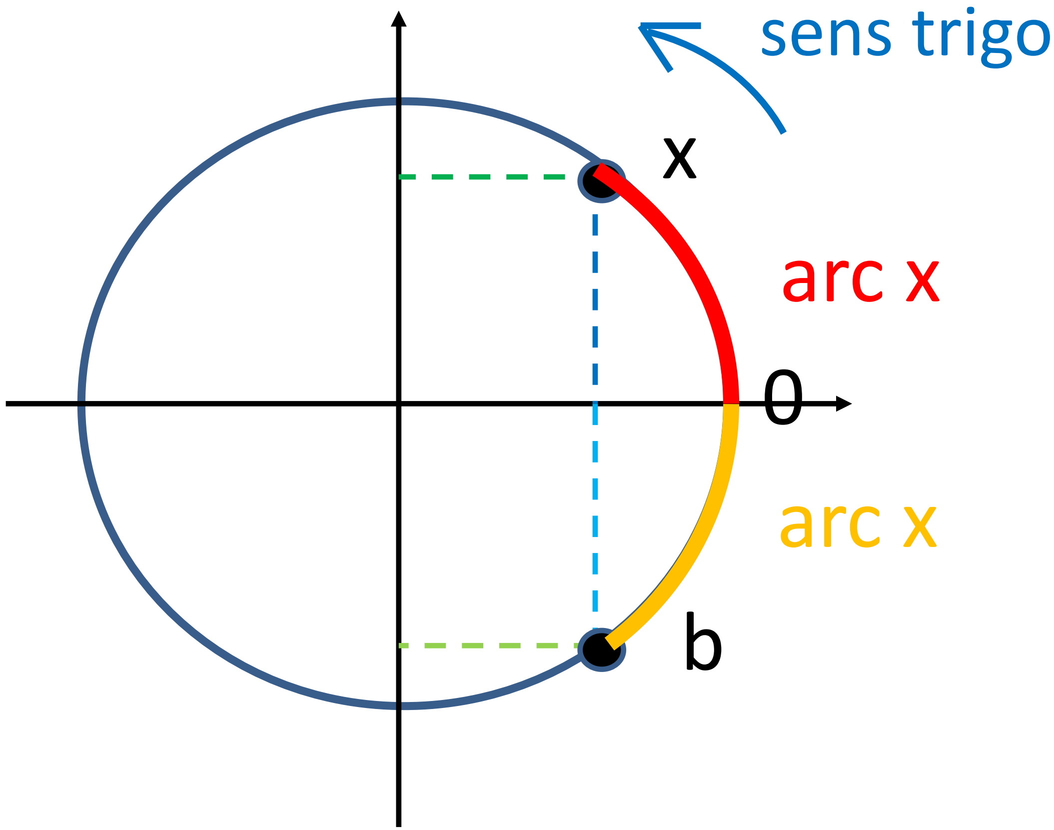
Deux points du cercle trigo, ayant la même abscisse :



b = … ?

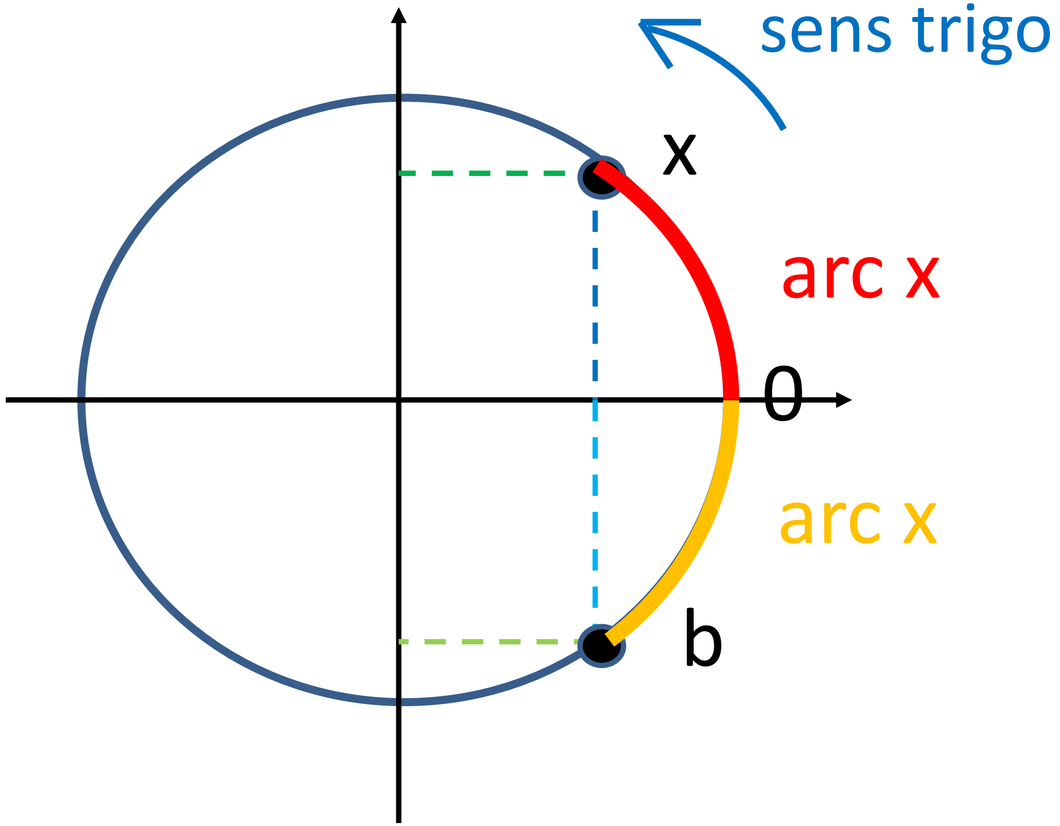
Deux points du cercle trigo, ayant la même abscisse :

deux arcs de même longueur $x - 0 = x$



Deux points du cercle trigo, ayant la même abscisse :

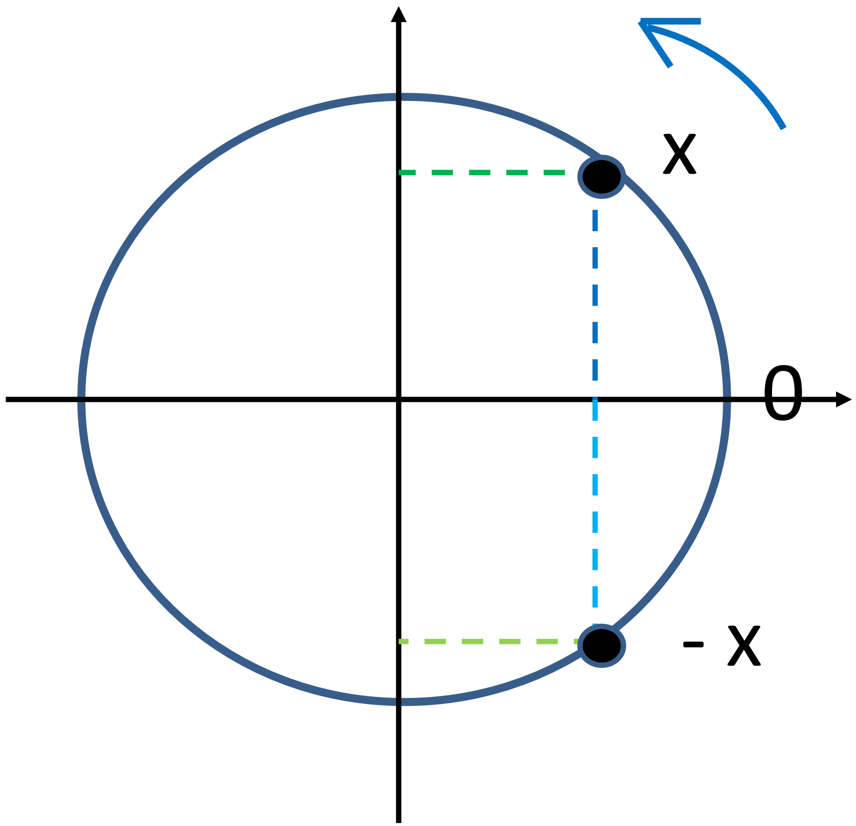
deux arcs de même longueur $\quad x - 0 = x$



$b = 0 - \text{arc } x$

$= 0 - x = -x$

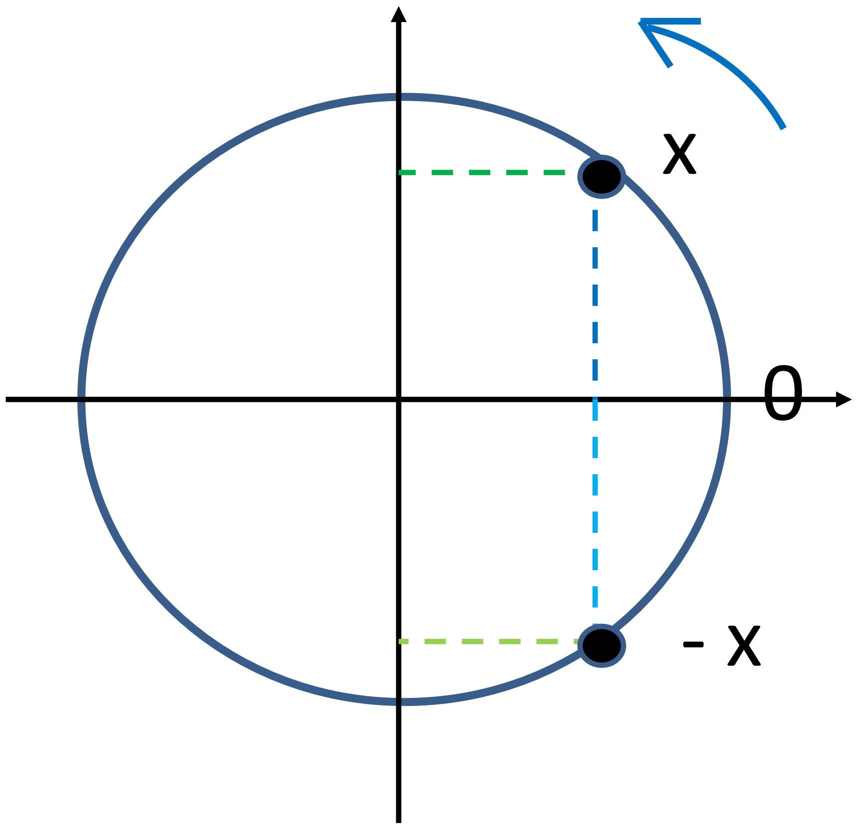
Deux points du cercle trigo, ayant la même abscisse :



cos (- x) = ...

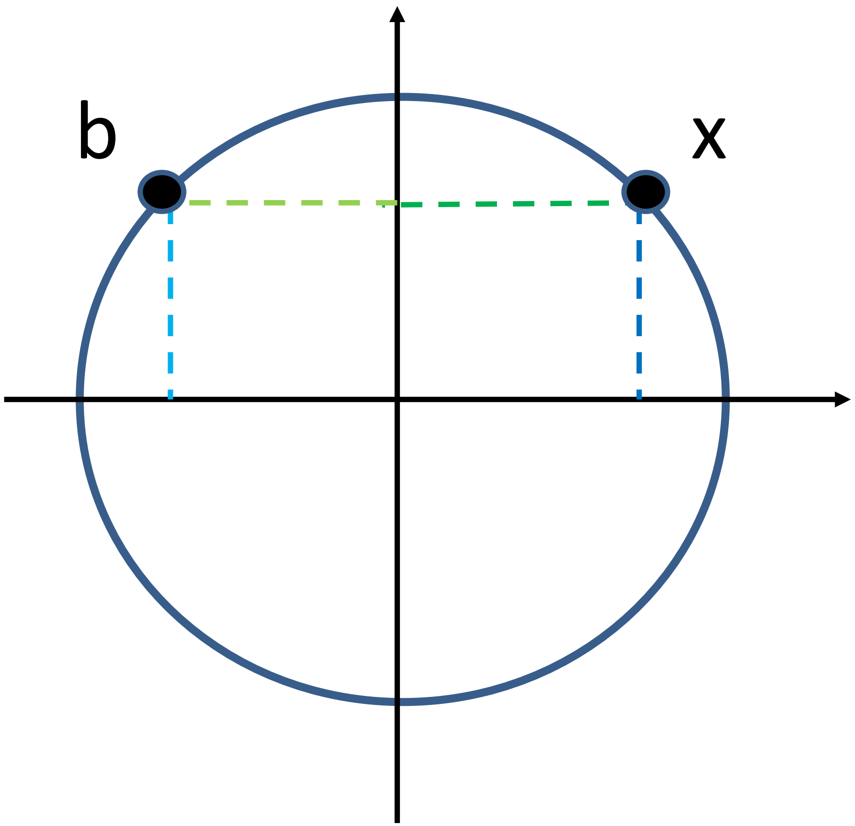
sin (- x) = ...

Deux points du cercle trigo, ayant la même abscisse :



$$\boxed{\begin{array}{l} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{array}}$$

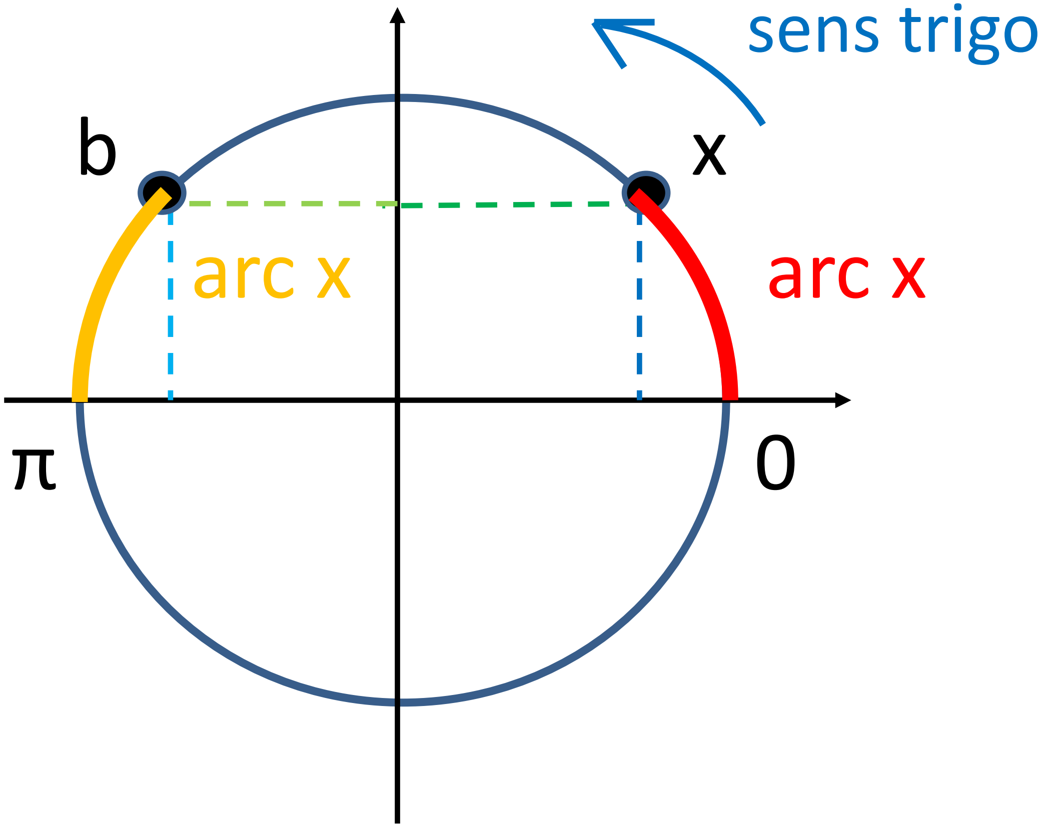
Deux points du cercle trigo, ayant la même ordonnée :



b = … ?

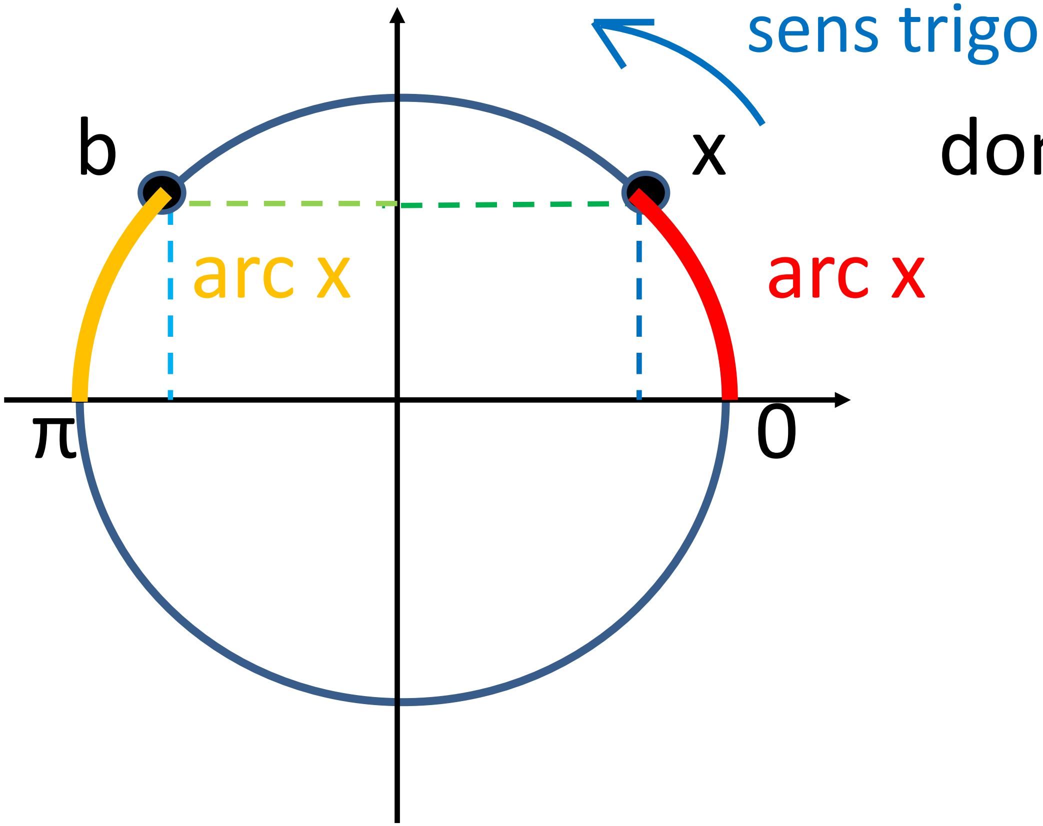
Deux points du cercle trigo, ayant la même ordonnée :

deux arcs de même longueur,   x – 0 = x



Deux points du cercle trigo, ayant la même ordonnée :

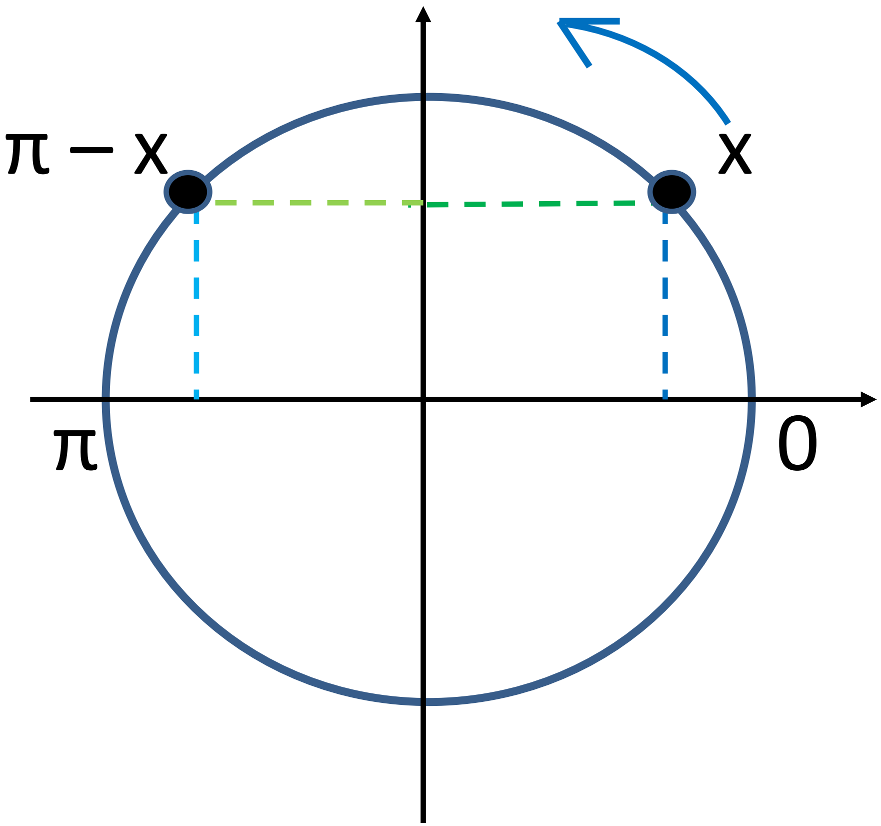
deux arcs de même longueur, $x - 0 = x$



donc $b = \pi - \text{arc } x$

$= \pi - x$

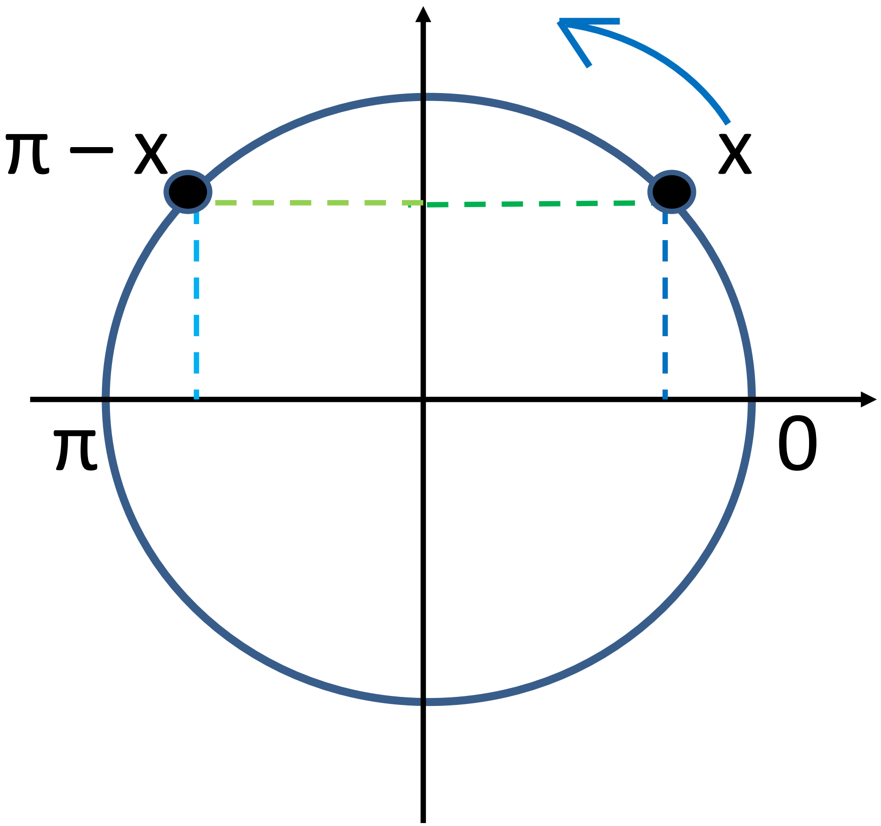
Deux points du cercle trigo, ayant la même ordonnée :



cos (π − x) = …

sin (π − x) = …

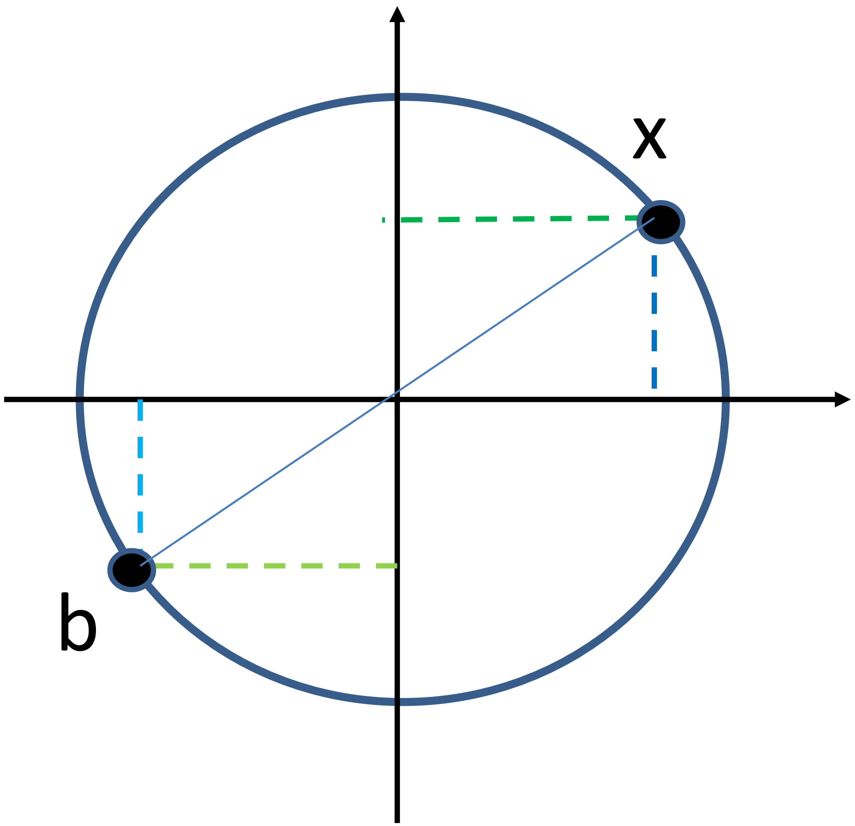
Deux points du cercle trigo, ayant la même ordonnée :



$\cos(\pi - x) = -\cos x$

$\sin(\pi - x) = \sin x$

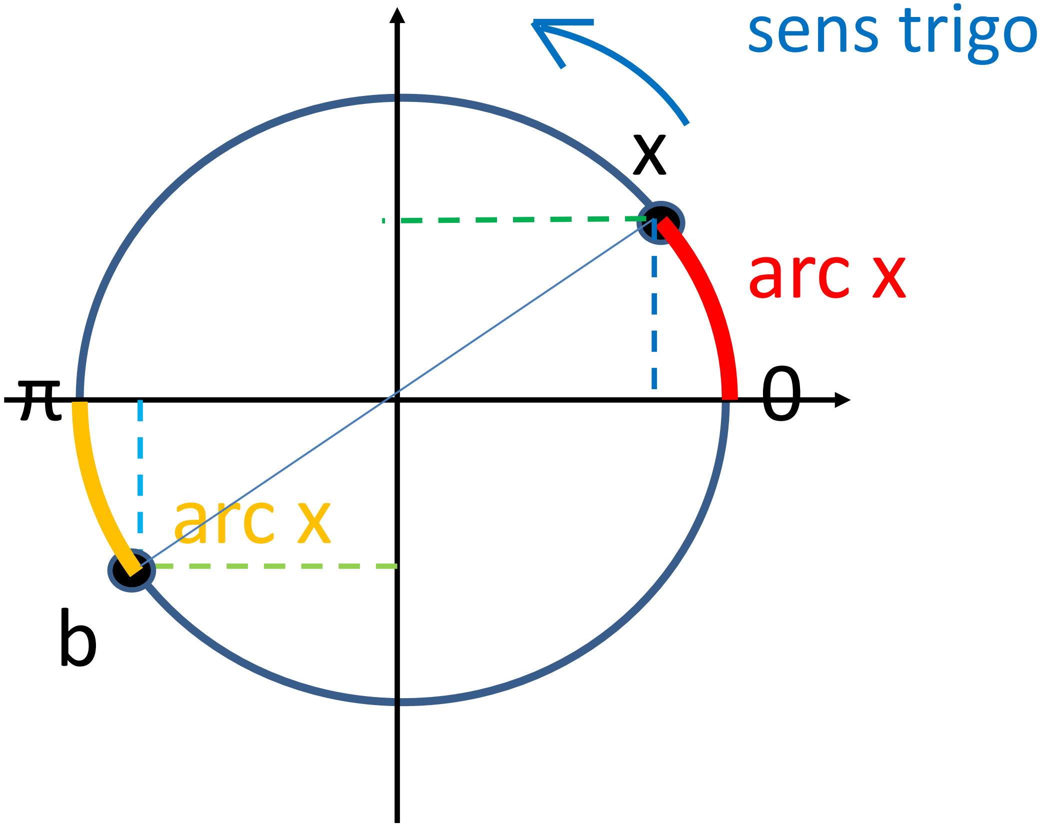
Deux points du cercle trigo, symétriques par rapport à l'origine :



b = … ?

Deux points du cercle trigo, symétriques par rapport à l’origine :

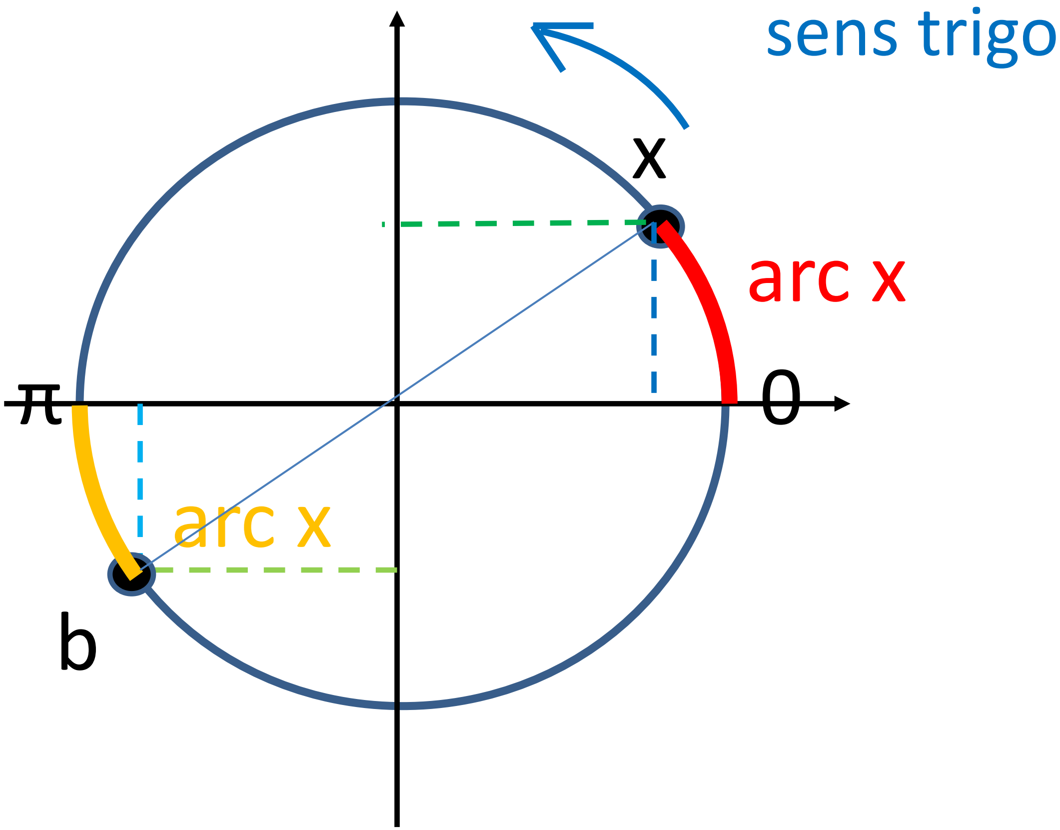
deux arcs de même longueur, $x - 0 = x$



b = … ?

Deux points du cercle trigo, symétriques par rapport à l'origine :

deux arcs de même longueur, $x - 0 = x$

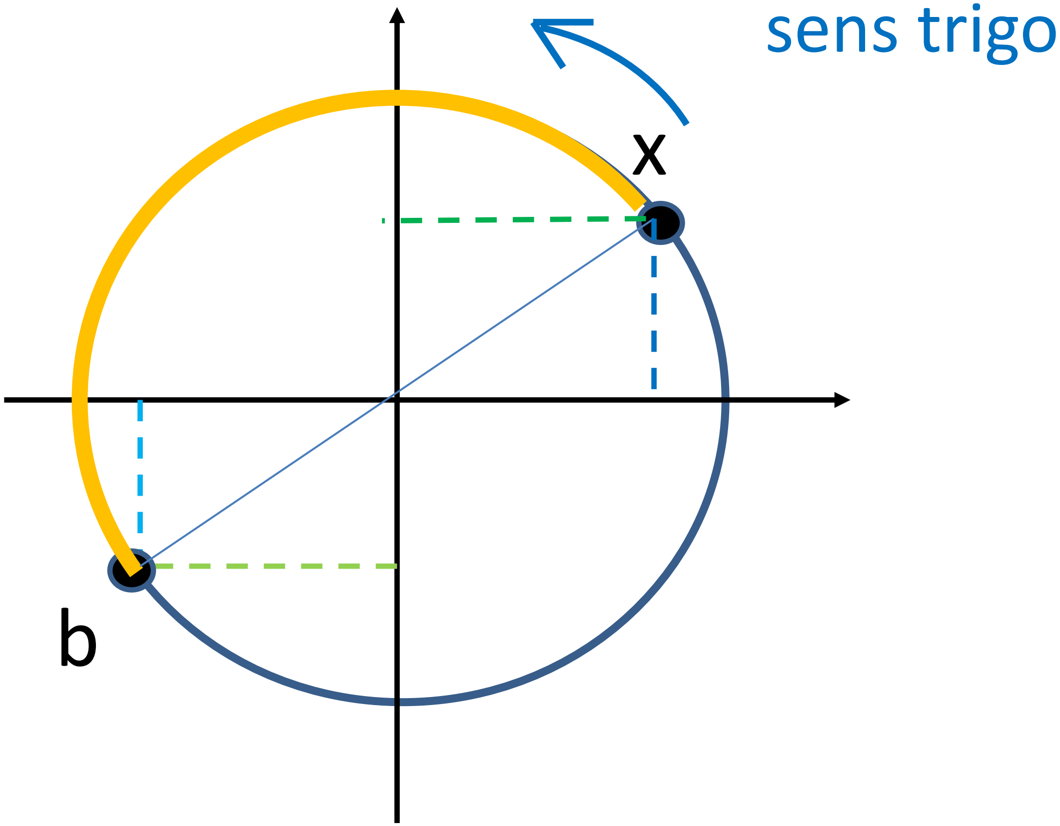


$b = \pi + \text{arc } x$

$= \pi + x$

Deux points du cercle trigo, symétriques par rapport à l'origine :

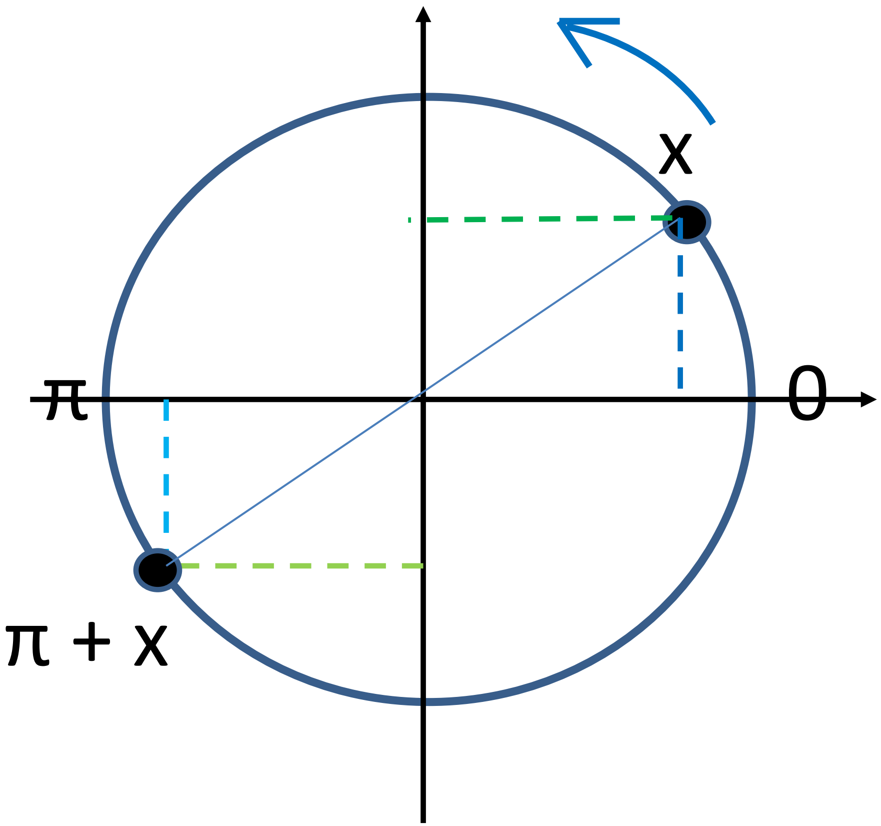
Autre méthode :



$b = x + \frac{1}{2}$ tour

$= x + \pi$

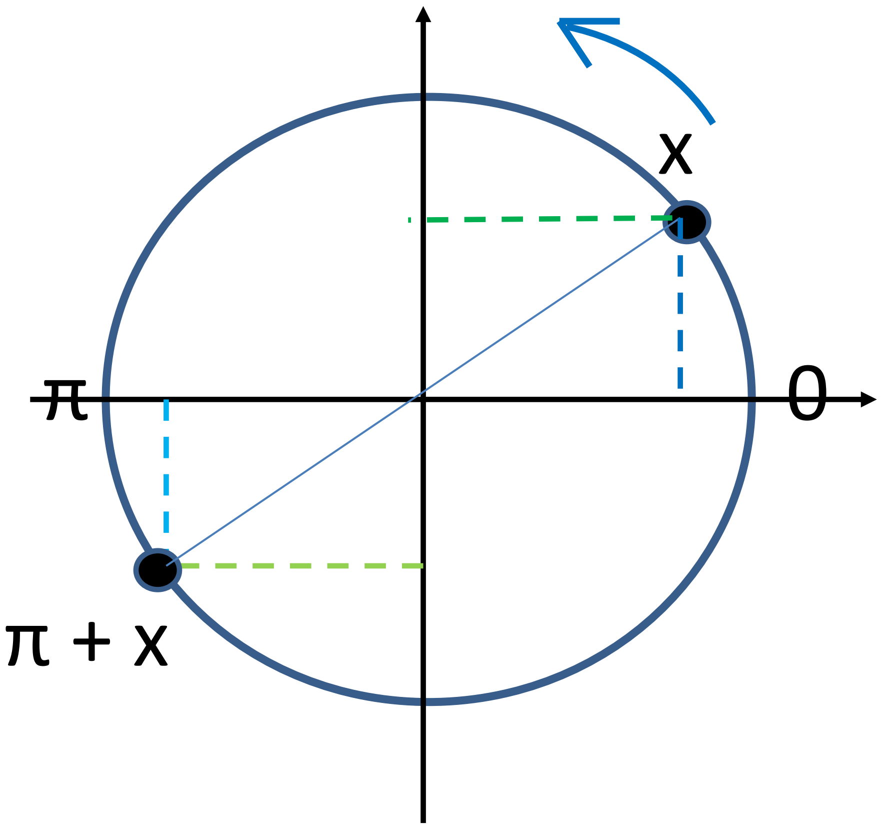
Deux points du cercle trigo, symétriques par rapport à l'origine :



$\cos(\pi + x) = \ldots$

$\sin(\pi + x) = \ldots$

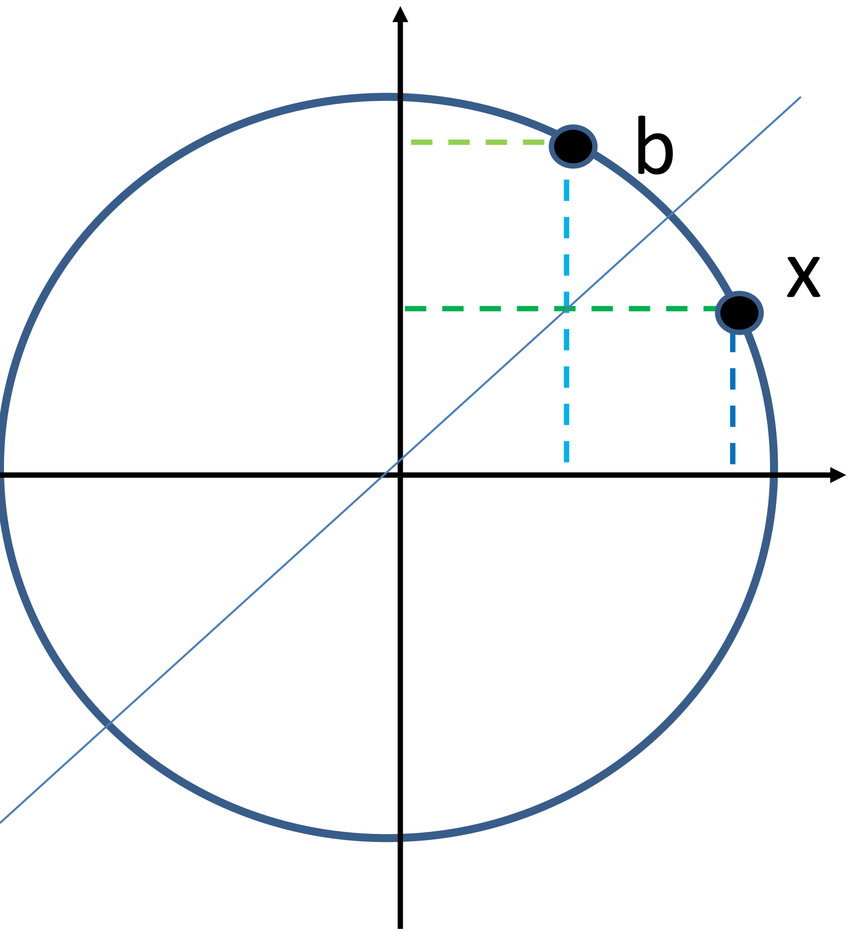
Deux points du cercle trigo, symétriques par rapport à l'origine :



$\cos(\pi + x) = -\cos x$

$\sin(\pi + x) = -\sin x$

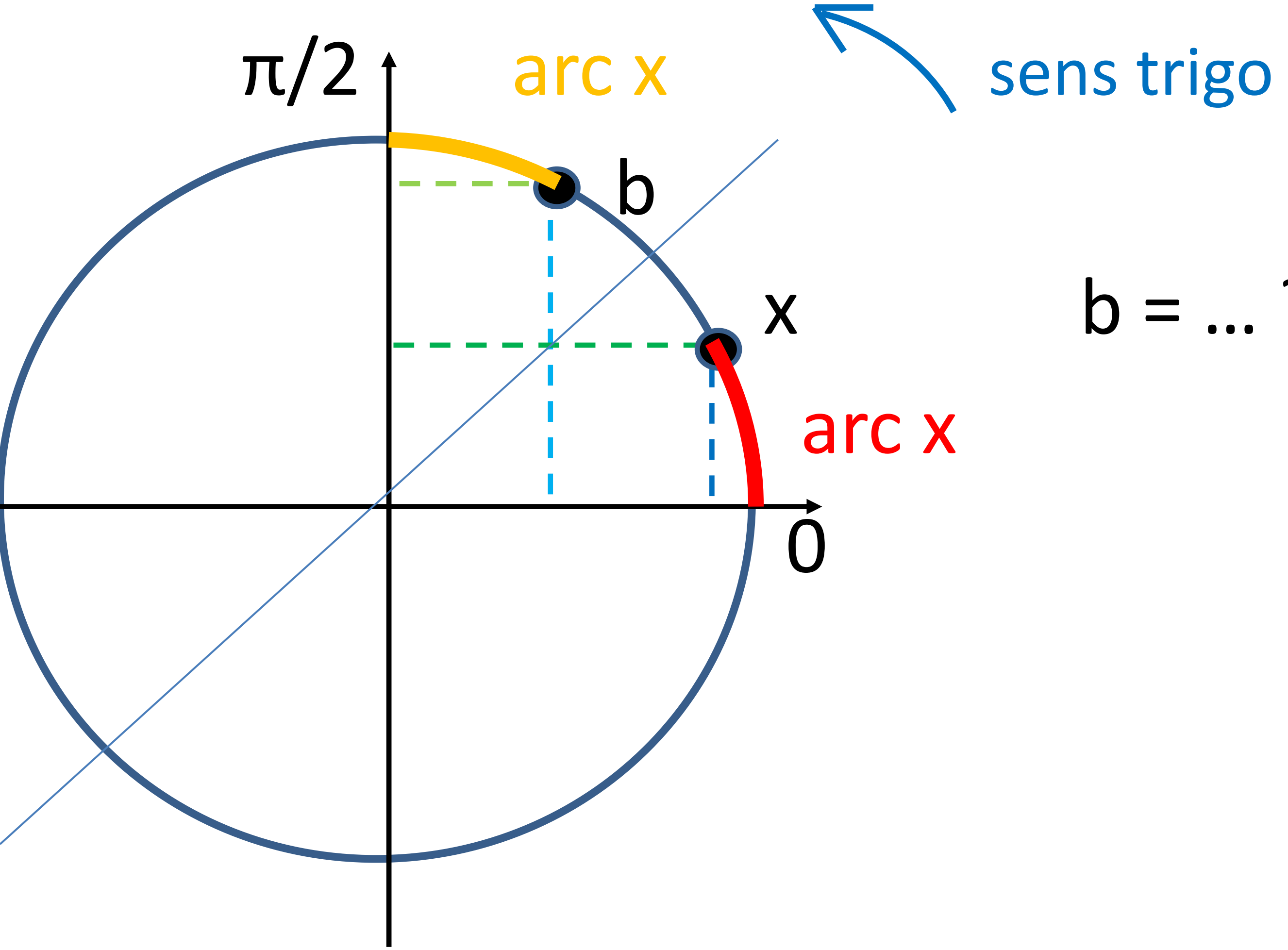
Deux points du cercle trigo, symétriques par rapport à la bissectrice de l’angle droit :



b = … ?

Deux points du cercle trigo, symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle droit :

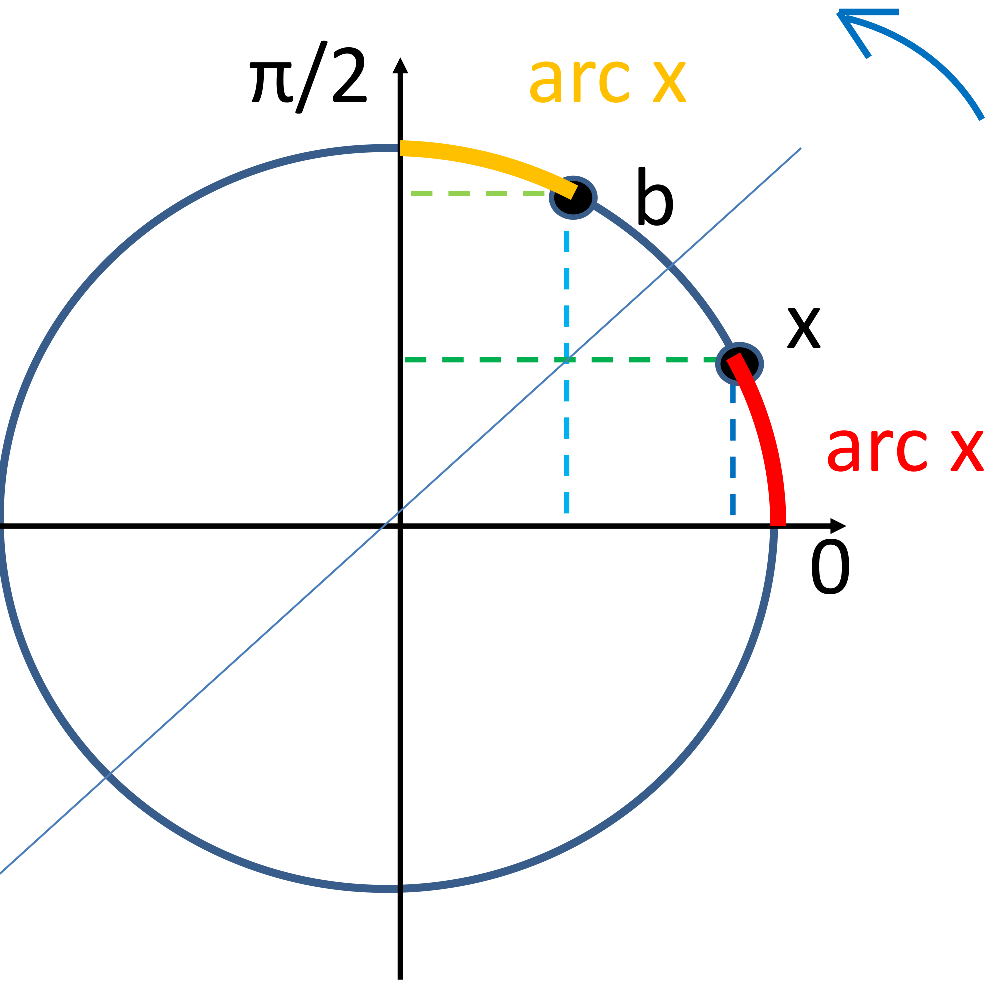
deux arcs de même longueur, $x - 0 = x$



$b = \ldots ?$

Deux points du cercle trigo, symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle droit :

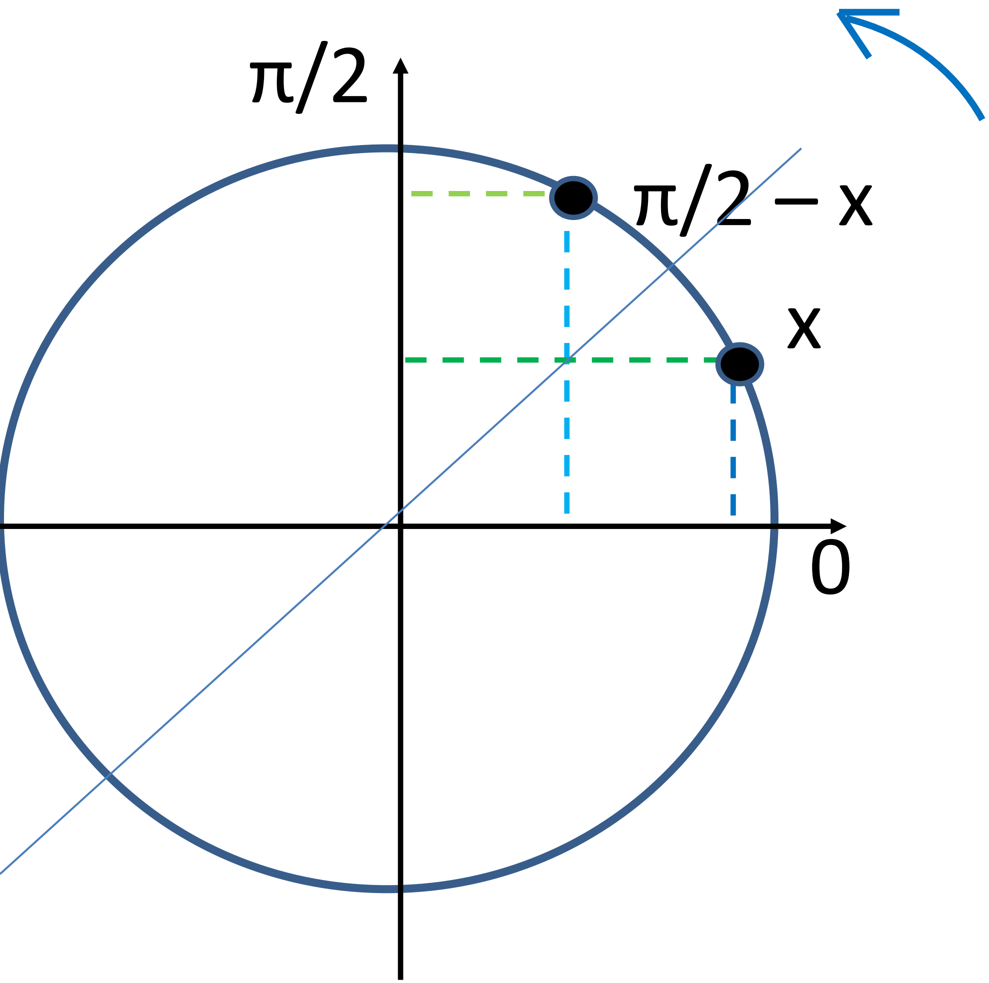
deux arcs de même longueur, $x - 0 = x$



$$b = \pi/2 - \text{arc } x$$

$$= \pi/2 - x$$

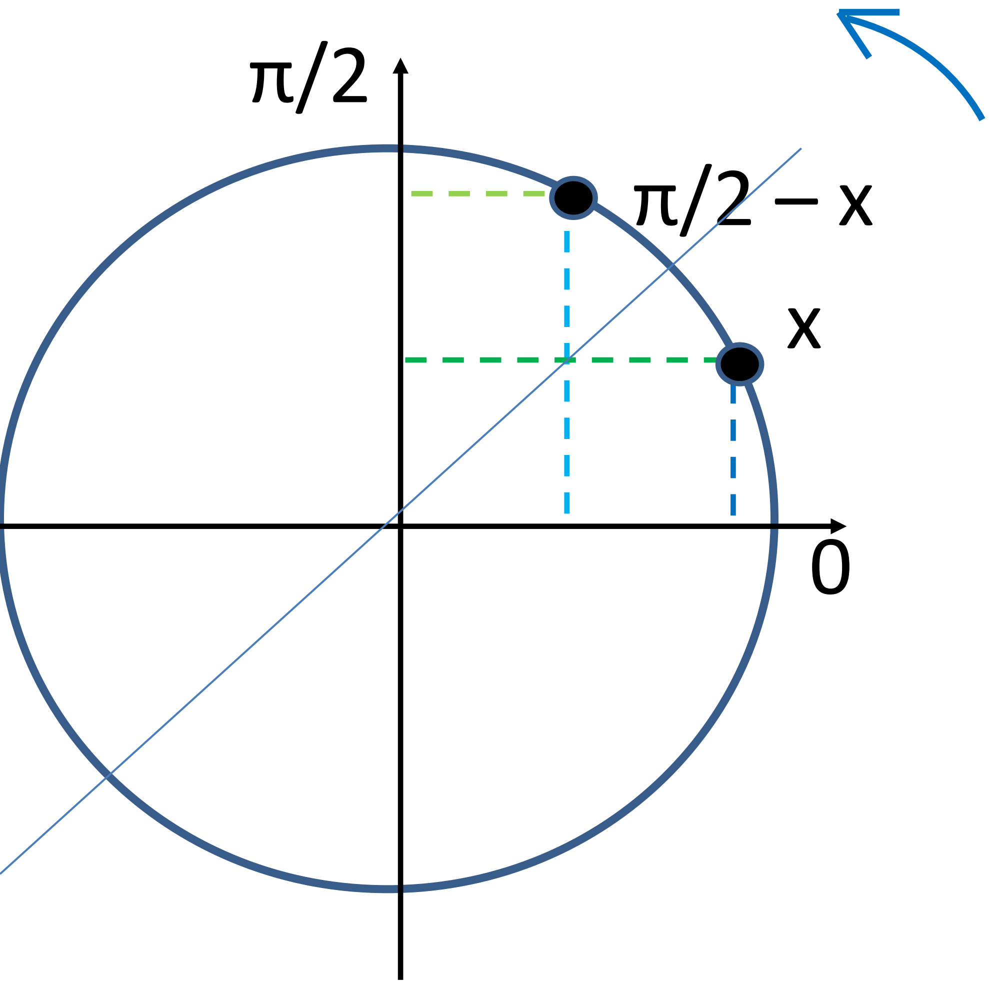
Deux points du cercle trigo, symétriques par rapport à la bissectrice de l’angle droit :



$\cos(\pi/2 - x) = \ldots$

$\sin(\pi/2 - x) = \ldots$

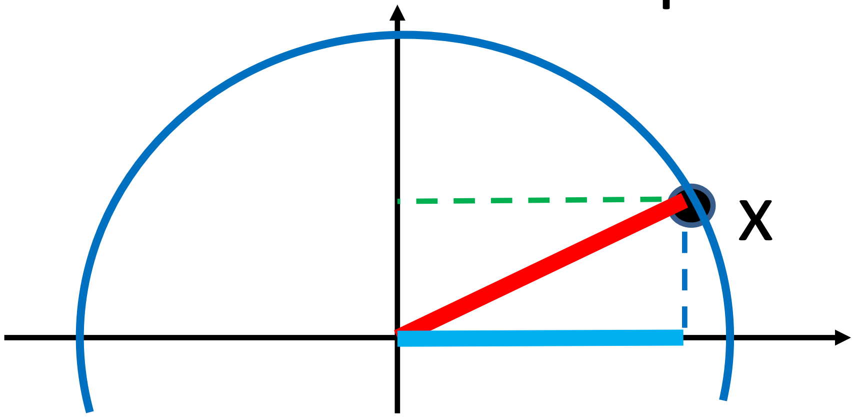
Deux points du cercle trigo, symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle droit :

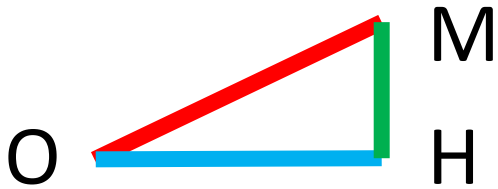


$\cos(\pi/2 - x) = \sin x$

$\sin(\pi/2 - x) = \cos x$

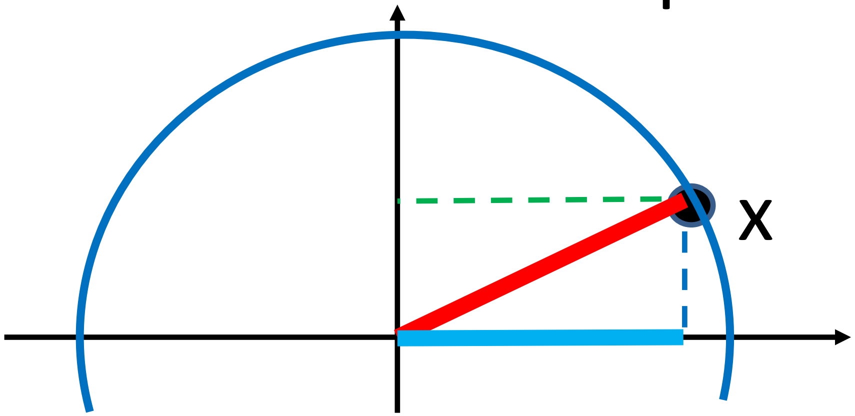
Formule valable pour tout réel x :

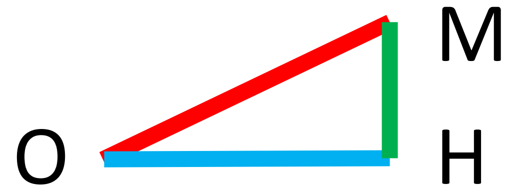




Le triangle OHM …

Formule valable pour tout réel x :

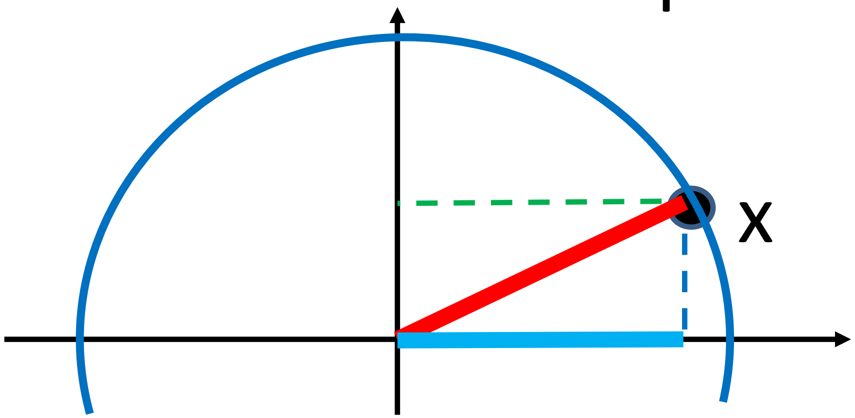


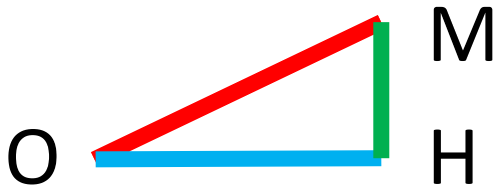


Le triangle OHM est rectangle

car …

Formule valable pour tout réel x :



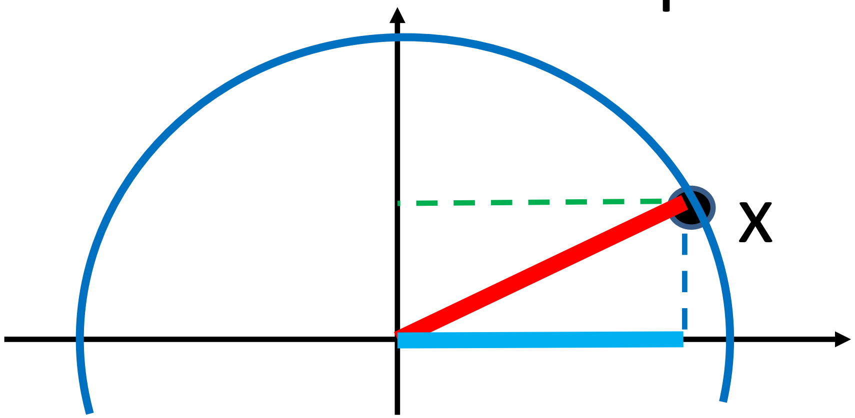


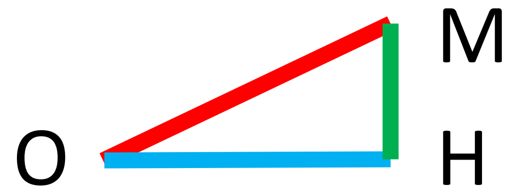
Le triangle OHM est rectangle

car le repère est orthogonal.

…

Formule valable pour tout réel x :





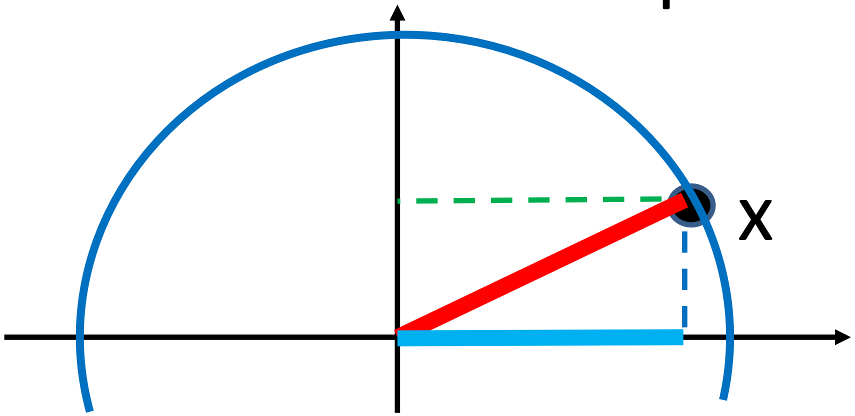
Le triangle OHM est rectangle

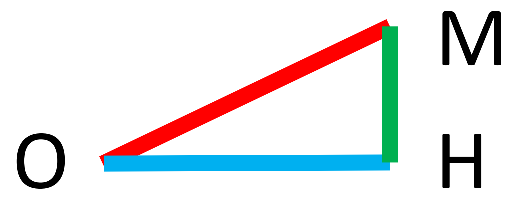
car le repère est orthogonal.

Pythagore $OH^2 + HM^2 = OM^2$

OH = … et HM = …

Formule valable pour tout réel x :





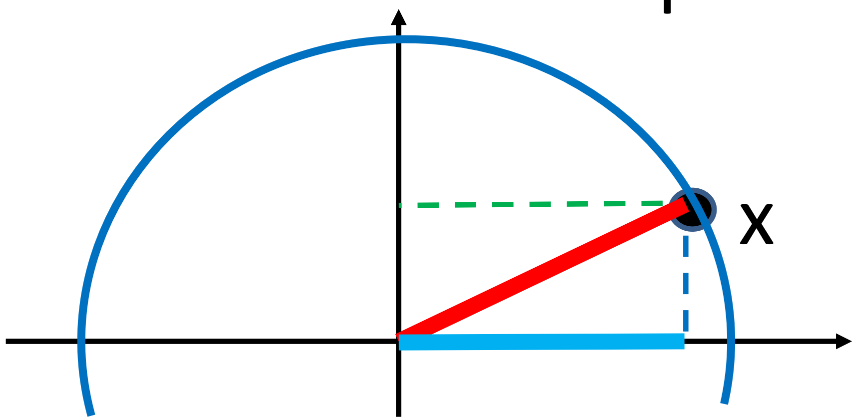
Le triangle OHM est rectangle

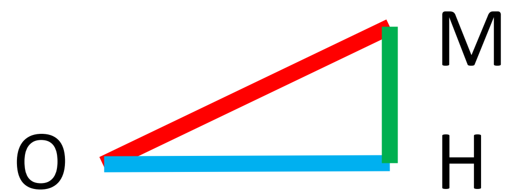
car le repère est orthogonal.

$\Rightarrow$ Pythagore $\Rightarrow$ $OH^2 + HM^2 = OM^2$

$OH = |\cos x|$ et $HM = |\sin x|$ car ...

Formule valable pour tout réel x :





Le triangle OHM est rectangle

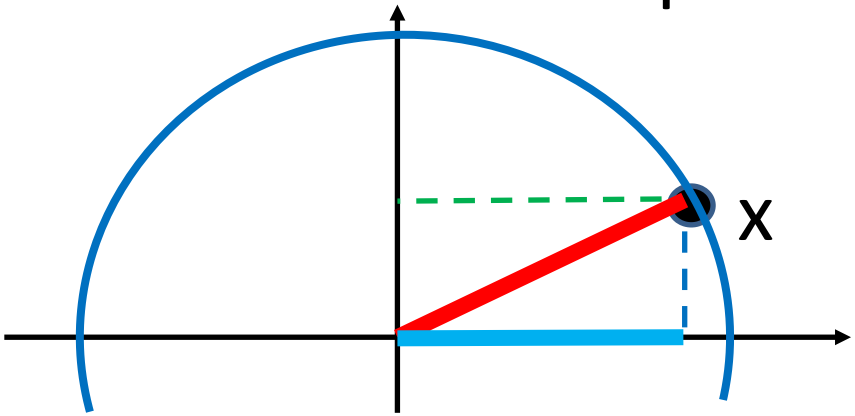
car le repère est orthogonal.

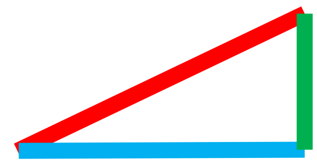
$\Rightarrow$ Pythagore $\Rightarrow$ $OH^2 + HM^2 = OM^2$

$OH = |\cos x|$ et $HM = |\sin x|$ car le repère est normé.

$OM = \ldots$

Formule valable pour tout réel x :





Le triangle OHM est rectangle

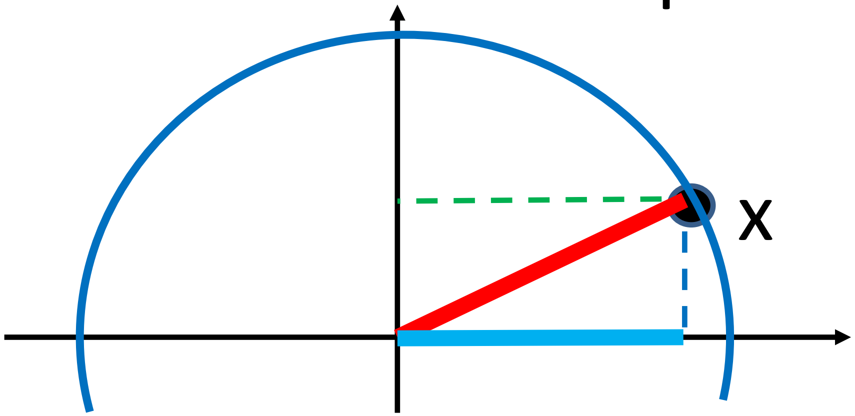
car le repère est orthogonal.

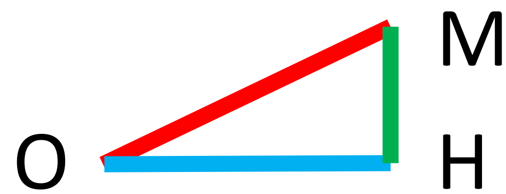
⇒ Pythagore ⇒ $OH^2 + HM^2 = OM^2$

$OH = |\cos x|$ et $HM = |\sin x|$ car le repère est normé.

$OM = 1$ car …

Formule valable pour tout réel x :





Le triangle OHM est rectangle

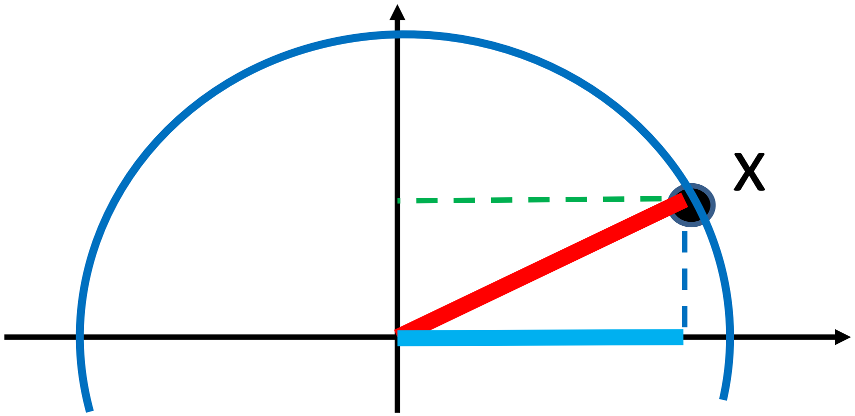
car le repère est orthogonal.

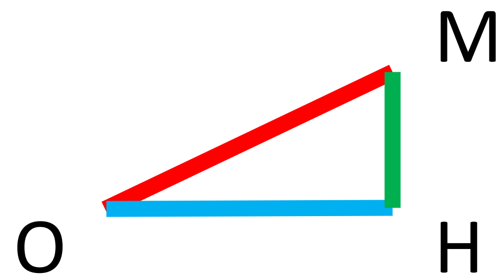
$\Rightarrow$ Pythagore $\Rightarrow$ $OH^2 + HM^2 = OM^2$

$OH = |\cos x|$ et $HM = |\sin x|$ car le repère est normé.

$OM = 1$ car …

Formule valable pour tout réel x :





Le triangle OHM est rectangle

car le repère est orthogonal.

$\Rightarrow$ Pythagore $\Rightarrow$ $OH^2 + HM^2 = OM^2$

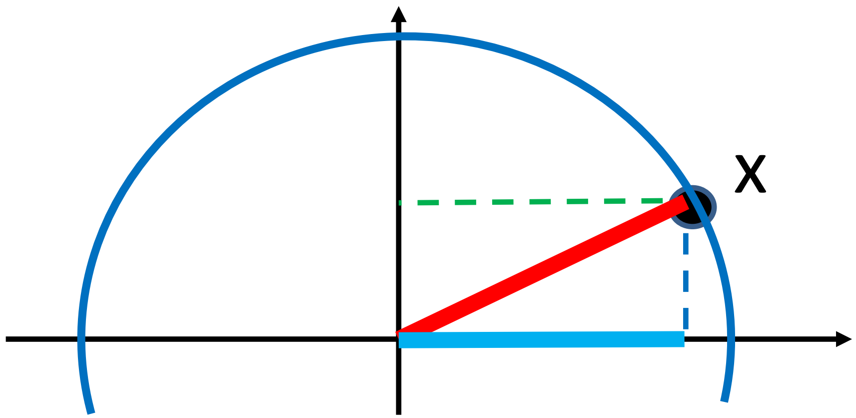
$OH = |\cos x|$ et $HM = |\sin x|$ car le repère est normé.

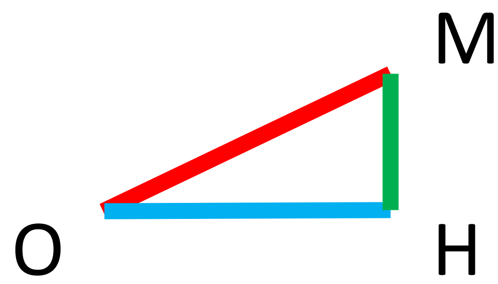
$OM = 1$ car le cercle est le cercle trigonométrique.

$\Rightarrow (\, |\cos x| \,)^2 + (\, |\sin x| \,)^2 = 1^2$

$\Rightarrow (\, \ldots \qquad)^2 + (\, \ldots \qquad)^2 = \ldots$

Formule valable pour *tout* réel x :





Le triangle OHM est rectangle

car le repère est orthogonal.

$\Rightarrow$ Pythagore $\Rightarrow$ $OH^2 + HM^2 = OM^2$

$OH = |\cos x|$ et $HM = |\sin x|$ car le repère est normé.

$OM = 1$ car le cercle est le cercle trigonométrique.

$\Rightarrow$ $(\ |\cos x|\ )^2 + (\ |\sin x|\ )^2 = 1^2$

$\Rightarrow$ $(\ \cos x\ )^2 + (\ \sin x\ )^2 = 1$

que l'on écrit $\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$

Application :

On connaît $\cos \dfrac{13\pi}{12} = \dfrac{-\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$

Déterminez son sinus

(sans calculatrice).

Application :

$$A = \frac{13\pi}{12} \qquad \cos A = \frac{-\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(\frac{-\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}\right)^2$$

$$A = 13\pi / 12$$

$$\sin^2 A = 1 - \left(\frac{-\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \right)^2 = 1 - \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{4 \times 2}$$

$A = 13\pi / 12$

$$\sin^2 A = 1 - \left(\frac{-\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \right)^2 = 1 - \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{4 \times 2}$$

$$= \frac{8}{8} - \frac{4 + 2\sqrt{3}}{8} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{8} = \left(\frac{\ldots}{\ldots} \right)^2$$

$$A = \frac{13\pi}{12}$$

$$\sin^2 A = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{8} = \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{4 \times 2} = \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}\right)^2$$

donc $\sin A = \ldots$

$A = 13\pi / 12$

$$\sin^2 A = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{8} = \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{4 \times 2} = \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}\right)^2$$

donc $\sin A = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$

$A = 13\pi / 12$

$$\sin^2 A = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{8} = \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{4 \times 2} = \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}\right)^2$$

donc $\sin A = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$ ou $\sin A = -\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$

Deux réponses ?

$A = 13\pi / 12$

$$\sin^2 A = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{8} = \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{4 \times 2} = \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}\right)^2$$

donc $\sin A = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$ ou $\sin A = -\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$

Deux réponses ? Un réel ➡ un sinus

$A = 13\pi / 12$

$$\sin^2 A = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{8} = \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{4 \times 2} = \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}\right)^2$$

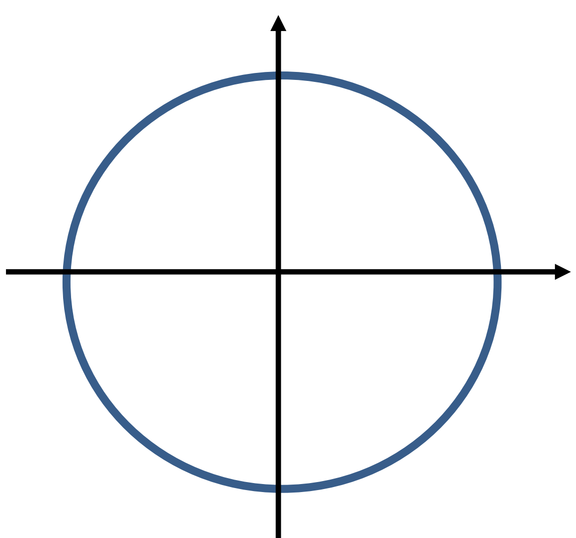
donc $\sin A = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$ ou $\sin A = -\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$

Une réponse > 0 l'autre < 0

$A = 13\pi / 12$

$$\sin A = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad \sin A = -\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

$A = 13\pi/12 = 0 + \pi + (\pi/2)/6$

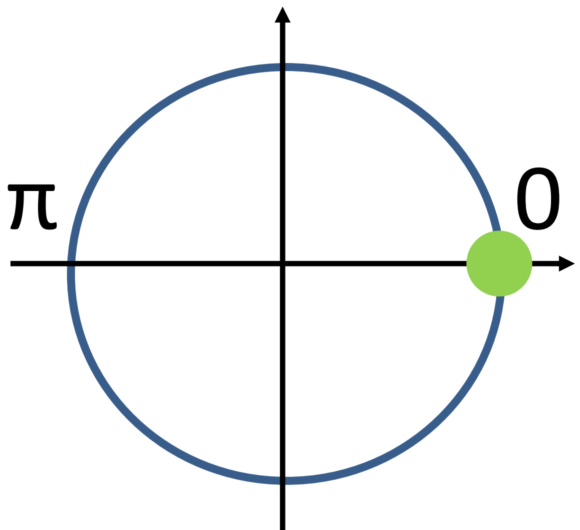


$A = 13\pi / 12$

$$\sin A = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad \sin A = -\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

$A = 13\pi/12 = 0 + \pi + (\pi/2)/6$

Je pars de 0

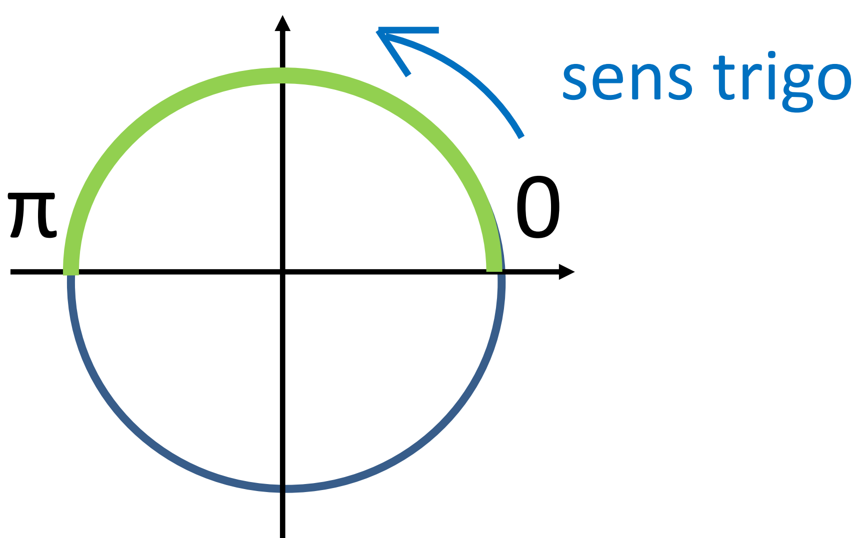


$A = 13\pi / 12$

$$\sin A = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad \sin A = -\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

$A = 13\pi/12 = 0 + \pi + (\pi/2)/6$

Je pars de 0, j'avance de 0,5 tour,



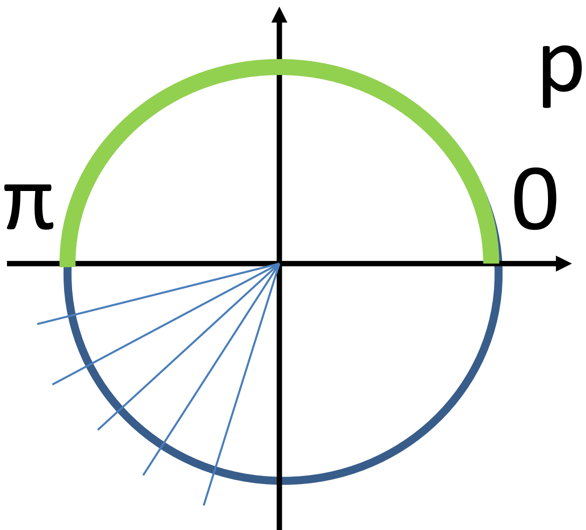
$A = 13\pi / 12$

$$\sin A = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad \sin A = -\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

$A = 13\pi/12 = 0 + \pi + (\pi/2)/6$

Je pars de 0, j'avance de 0,5 tour,

puis de 1/6 de ¼ de tour :



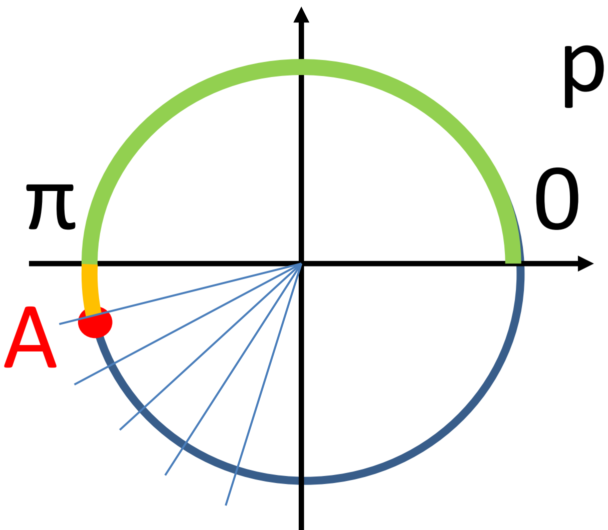
$$A = 13\pi / 12$$

$$\sin A = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad \sin A = -\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

$$A = 13\pi/12 = 0 + \pi + (\pi/2)/6$$

Je pars de 0, j'avance de 0,5 tour,

puis de 1/6 de ¼ de tour :

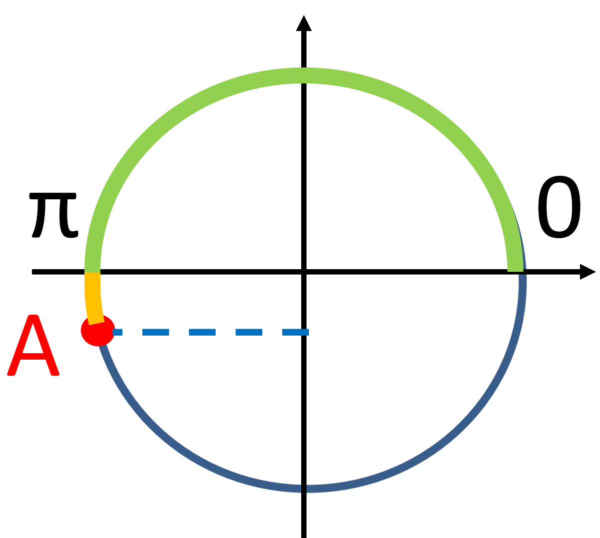


$$A = 13\pi / 12$$

$$\sin A = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad \sin A = -\,\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

$$A = 13\pi/12 = 0 + \pi + (\pi/2)/6$$

$$\sin A < 0$$



$$\sin A = -\,\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

La trigo de collège est-elle compatible avec celle du lycée ?

… ?

La trigo de collège est-elle compatible avec celle du lycée ?

$$\cos a = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

La trigo de collège est-elle compatible avec celle du lycée ?

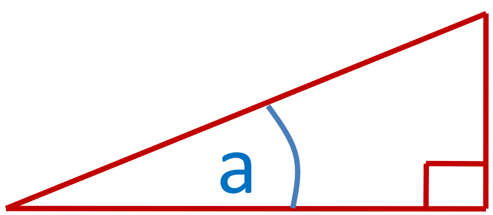
$$\cos a = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

uniquement avec a = angle aigu en degré

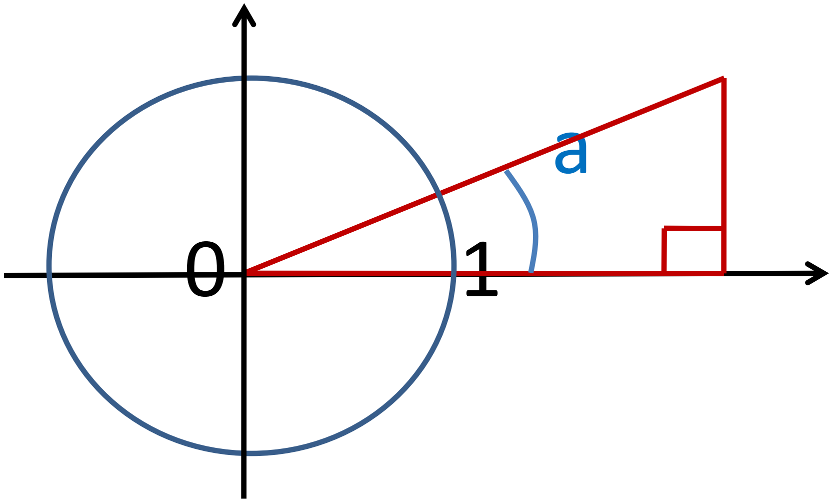
dans un triangle rectangle !

La trigo de collège est-elle compatible avec celle du lycée ?

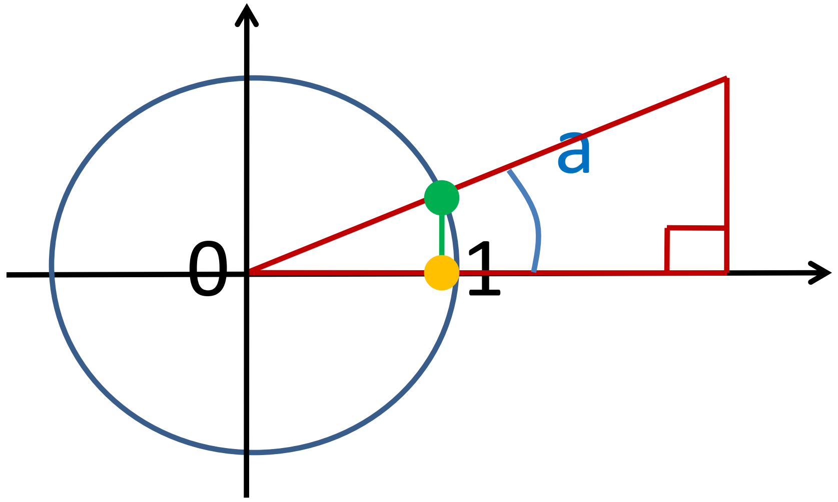
$$\cos \mathbf{a} = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$



$$\cos \mathbf{a} = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

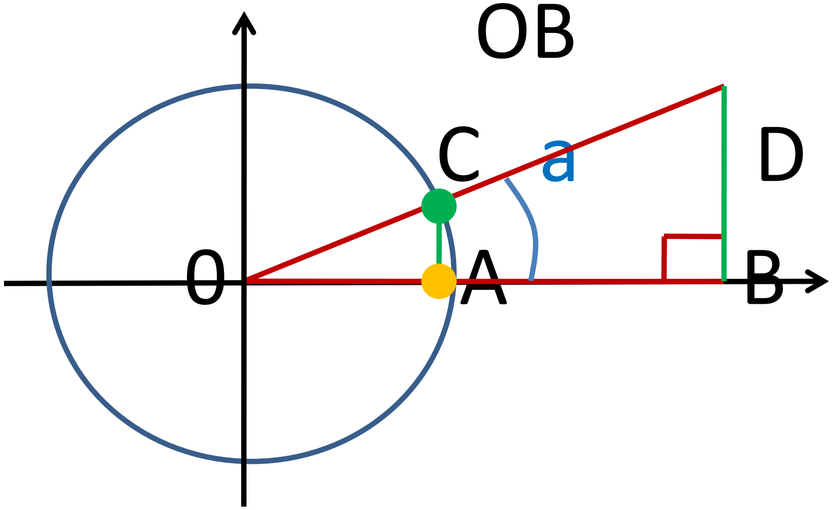


$$\cos a = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$ et $\cos z$ = abscisse de M



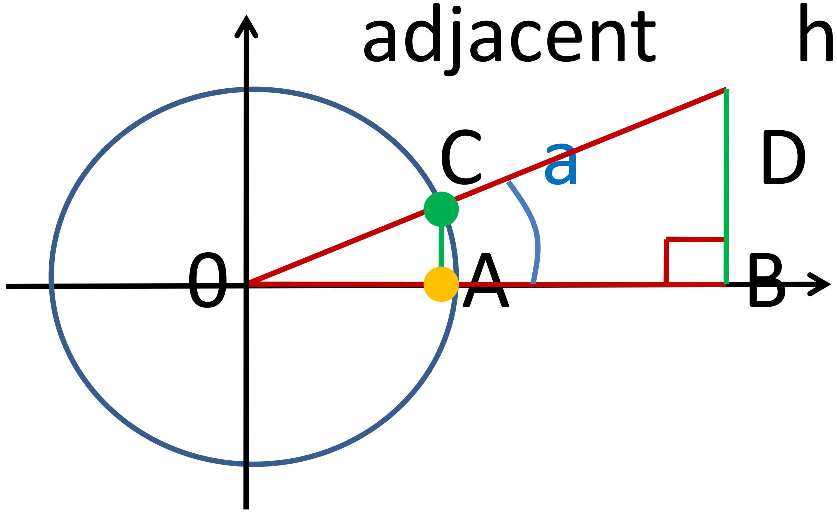
$$\cos a = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} \quad \text{et } \cos z = \text{abscisse de M}$$

$$\text{Thalès : } \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$$



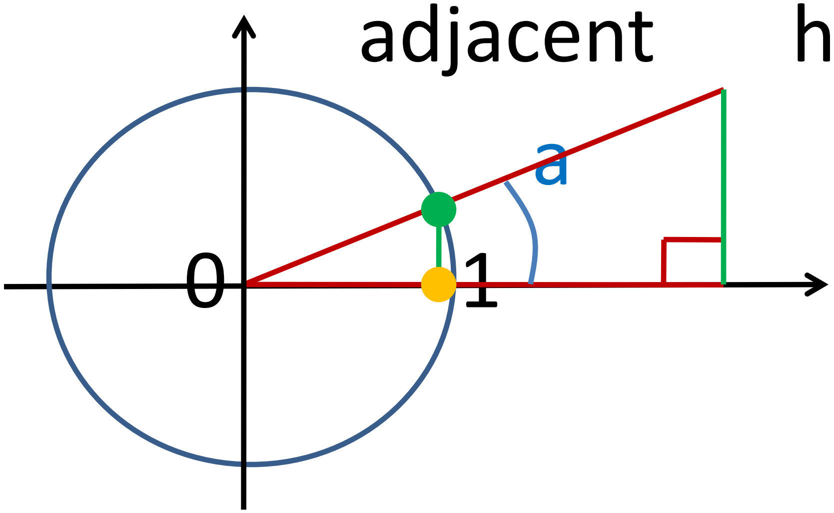
$$\cos \mathbf{a} = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$ et $\cos \mathbf{z}$ = abscisse de M

Thalès : $$\frac{\cos z}{\text{adjacent}} = \frac{1}{\text{hypoténuse}}$$



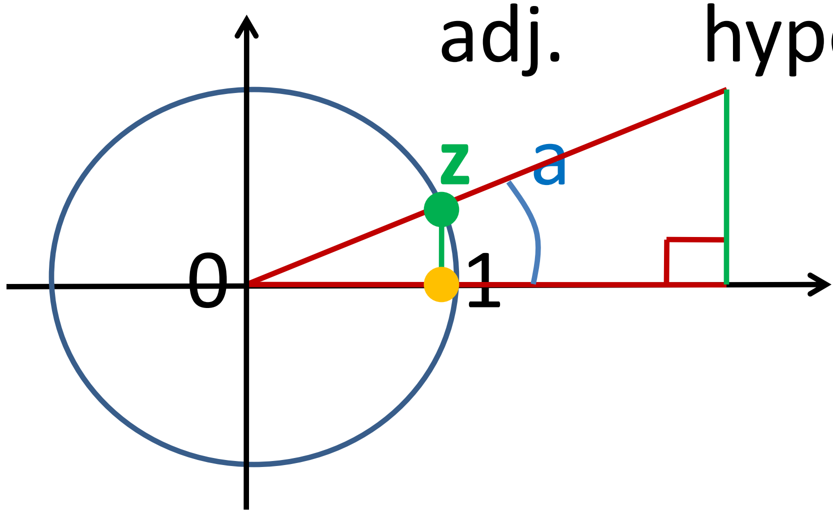
$$\cos \mathbf{a} = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} \quad \text{et} \quad \cos \mathbf{z} = \text{abscisse de M}$$

$$\text{Thalès : } \frac{\cos z}{\text{adjacent}} = \frac{1}{\text{hypoténuse}}$$



$$\cos \mathbf{a} = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} \quad \text{et } \cos \mathbf{z} = \text{abscisse de M}$$

$$\text{Thalès : } \frac{\cos \mathbf{z}}{\text{adj.}} = \frac{1}{\text{hypo.}} \Rightarrow \cos \mathbf{z} = \frac{\text{adj.}}{\text{hypo.}}$$



et **a** *en radian* et z ont mêmes valeurs numériques.