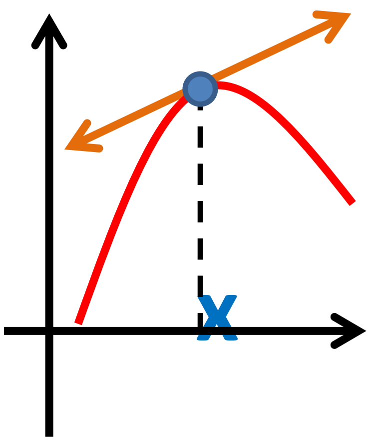
IV Fonction dérivée

f '(x) ...

donc $x \mapsto f'(x)$ est une fonction nommée f'

que l'on lit « f **prime** » et l'on nomme « **dérivée** de f »

avec **f '(x) = ...**

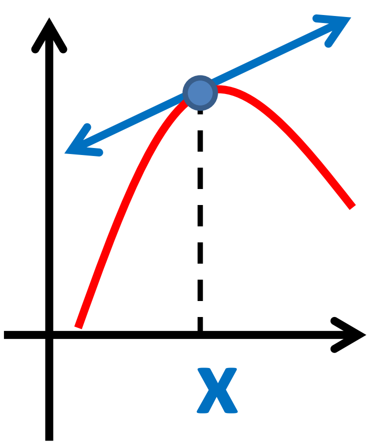


IV Fonction dérivée

f '(x) existe pour tout x de l'ensemble de dérivabilité, et est unique, donc **tout antécédent x est associé à une unique image** f '(x),

donc $x \mapsto f'(x)$ est une fonction nommée f '

que l'on lit « f **prime** » et l'on nomme « **dérivée** de f »



avec **f '(x) = le coeff. directeur de la tangente en x**

Exercice 7 :

Comparez, pour les fonctions suivantes, les ensembles de définition et de dérivabilité.

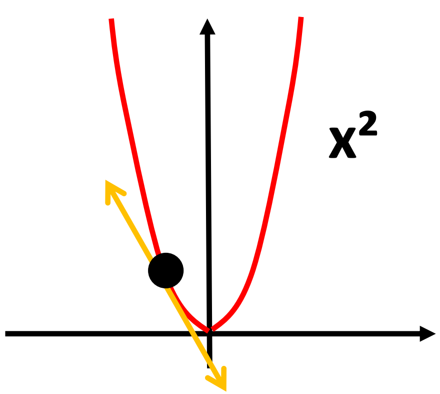
1°) Fonction carré.

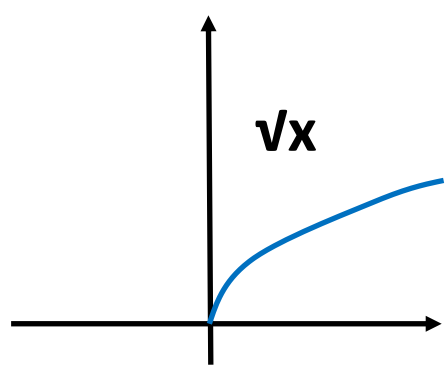
2°) Fonction racine carrée.

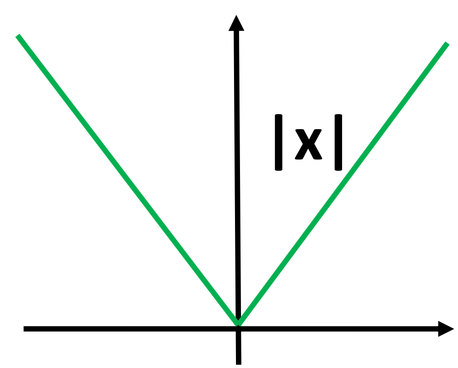
3°) Fonction valeur absolue.

La fonction carrée est définie et dérivable sur $] - \infty ; + \infty [= \mathbb{R}$

puisqu’en tout point d’abscisse x (de $\mathbb{R}$) on a une tangente et son coefficient directeur.





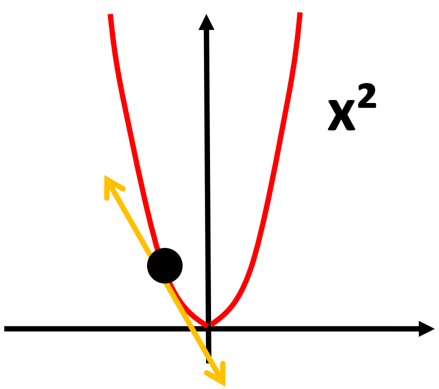


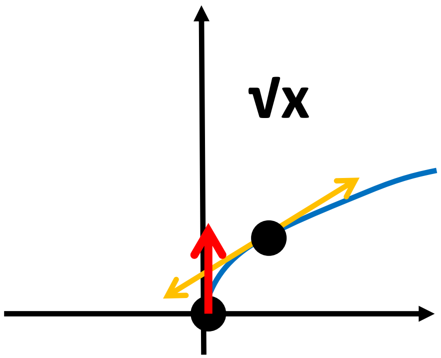
La fonction carrée est définie et dérivable sur $] -\infty ; +\infty [= \mathbb{R}$.

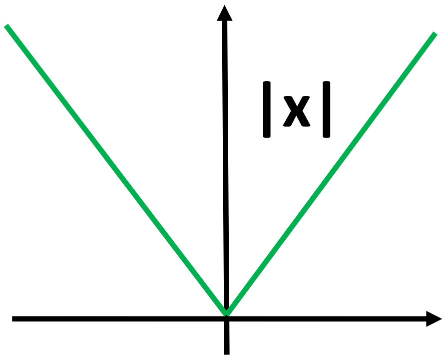
La fonction racine carrée est

définie sur $[0 ; +\infty [= \mathbb{R}^+$

et dérivable sur $] 0 ; +\infty [= \mathbb{R}^{+*}$ car en 0 on n’a qu’une demie tangente.



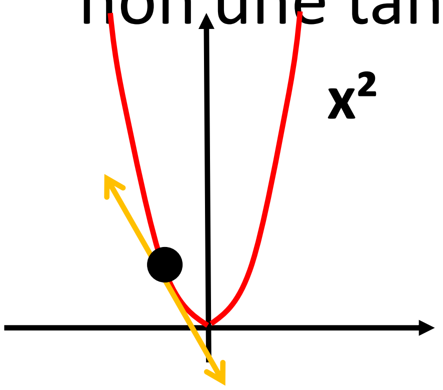


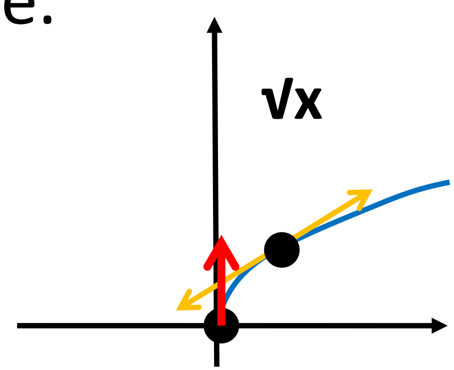


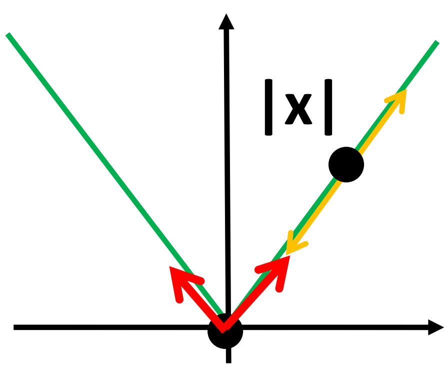
La fonction carrée est définie et dérivable sur $] -\infty ; +\infty [= \mathbb{R}$.

La fonction racine carrée est définie sur $[0 ; +\infty [= \mathbb{R}^+$ et dérivable sur $] 0 ; +\infty [= \mathbb{R}^{+*}$ car en 0 on n'a qu'une demie tangente.

La fonction valeur absolue est définie sur $] -\infty ; +\infty [= \mathbb{R}$ et dérivable sur $] -\infty ; 0 [\cup] 0 ; +\infty [= \mathbb{R}^*$ car en 0 on a deux demies tangentes différentes et non une tangente.





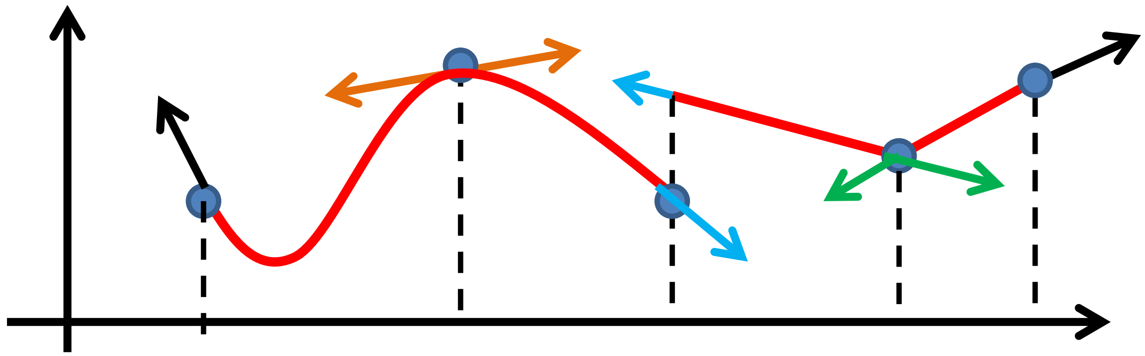


Conclusion :

Les ensembles de définition et de dérivabilité ne sont pas forcément identiques.

1) Pour que la tangente existe il faut que la courbe existe $\Rightarrow$ $D_{f'} \subset D_f$

2) S'il y a une cassure ou une discontinuité en un point B d'abscisse b de la courbe, alors $b \in D_f$ mais $b \notin D_{f'}$



V Tableau des dérivées :

Avec d’autres compétences algébriques, on peut déterminer les dérivées des fonctions, comme on l’a fait pour les fonctions $ax+b$ et x^2.

On les range dans un tableau en n’omettant pas les ensembles de définition et de dérivabilité :

Tableau des dérivées pour la 1ère :

avec les fonctions de références :

fonction f	dérivée f '
$ax + b$	…
x^2	…
x^3	…

combinées entre elles : *k (n^b), u et v (fct)*

$k \times u$	$k \times u'$
$u + v$	$u' + v'$

Tableau des dérivées pour la 1ère en Tronc commun :

avec les fonctions de références :

fonction f	dérivée f '	
$ax + b$	a	voir exo 5
x^2	$2x$	voir exo 6
x^3	$3x^2$	

combinées entre elles : *k (n^b), u et v (fct)*

$k \times u$	$k \times u'$
$u + v$	$u' + v'$

Tableau des dérivées pour la 1ère en Spécialité :

avec les fonctions de références :

fonction f	dérivée f '
$ax + b$	a
x^n	$n\,x^{n-1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

combinées entre elles :

k (nb), u et v (fct)

$k \times u$	$k \times u'$
$u + v$	$u' + v'$
$u \times v$	$u' \times v + v' \times u$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
$u(v)$	$u'(v) \times v'$

Tableau des dérivées complet pour la Terminale

avec les fonctions de références :

fonction f	dérivée f '
$ax + b$	a
x^n	$n\,x^{n-1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

combinées entre elles :

k (nb), u et v (fct)

$k \times u$	$k \times u'$
$u + v$	$u' + v'$
$u \times v$	$u' \times v + v' \times u$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
$v(u)$	$v'(u) \times u'$

Exercice 8 :

Soient les fonctions définies par

$f(x) = x^2$ $g(x) = 5x - 3$ $h(x) = x^3$

1°) Déterminez le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3.

2°) Déterminez le coefficient directeur de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.

3°) Déterminez le coefficient directeur de la tangente à la courbe de h au point d'abscisse -2.

Exercice 8 :

$f(x) = x^2$

1°) Déterminez le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3.

Méthode : on utilise le tableau des dérivées, et on remplace x par l'abscisse du point.

1°) Déterminez le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3.

D'après le tableau des dérivées :

$f(x) = x^2 \Longrightarrow f'(x) = 2x$ *ou* $(x^2)' = 2x$

qui signifie

le **coefficient directeur** de la tangente à la courbe de la fct x^2 au point d'abscisse x est $\mathbf{2x}$

coeff. directeur de la tgte

au point d'abscisse 3 est $\mathbf{2(3)} = 6$

2°) Déterminez le coefficient directeur de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.

D'après le tableau des dérivées :

$g(x) = 5x - 3 \Rightarrow g'(x) = 5$ *ou* $(5x - 3)' = 5$

qui signifie

le **coefficient directeur** de la tangente à la courbe de la fct $5x - 3$ au point d'abscisse x est **5**

coeff. directeur de la tgte

au point d'abscisse 0 est $g'(0) = \mathbf{5}$

3°) Déterminez le coefficient directeur de la tangente à la courbe de h au point d'abscisse -2.

D'après le tableau des dérivées :

h(x) = x^3 $\Rightarrow$ h '(x) = $3x^2$ *ou* $(x^3)' = 3x^2$

qui signifie

le **coefficient directeur** de la tangente à la courbe de la fct x^3 au point d'abscisse x est **$3x^2$**

coeff. directeur de la tgte

au point d'abscisse -2 est $3(-2)^2 =$ **12**

Exercice 9 :

Soient les fonctions définies par

$f(x) = 6x^3$

$g(x) = x^2 + 3x$ $\qquad$ $h(x) = 4x^2 - 5x + 7$

1°) Déterminez leurs dérivées.

2°) Déterminez les coefficients directeurs des tangentes aux courbes de f ; g et h aux points d'abscisse -2.

1°) $f(x) = 6x^3 = 6 \,.\, x^3 = k\ u$

avec k un n^b et u une fct

D'après le tableau des dérivées : (*ligne 4*)

$f(x) = k\ u \Rightarrow f\,'(x) = k\ u'$

$f\,'(x) = (\ 6\ x^3\ )' = (\ k\ u\ )' = k\ u'$

$= 6\ (\ x^3\ )' = 6\ (\ \ldots\ \ \ )$

ligne 3

le **coeff. directeur** de la tgte

au point d'abscisse -2 est **…**

1°) $f(x) = 6x^3 = 6 \,.\, x^3 = k\,u$

avec k un n^b et u une fct

D'après le tableau des dérivées : (*ligne 4*)

$f(x) = k\,u \Rightarrow f\,'(x) = k\,u'$

$f\,'(x) = (6\,x^3)' = (k\,u)' = k\,u'$

$= 6\,(x^3)' = 6\,(3x^2) = 18x^2$

ligne 3

le **coeff. directeur** de la tgte

au point d'abscisse -2 est $\mathbf{18(-2)^2} = \mathbf{72}$

2°) $g(x) = x^2 + 3x = (x^2) + (3x) = u + v$

avec u et v des fct

D'après le tableau des dérivées : (*ligne 5*)

$g(x) = u + v \Rightarrow g'(x) = u' + v'$

$g'(x) = (x^2 + 3x)' = (u + v)' = u' + v'$

$= (x^2)' + (3x)'$

$= \ldots$

le **coeff. directeur** de la tgte

au point d'abscisse -2 est **…**

2°) $g(x) = x^2 + 3x = (x^2) + (3x) = u + v$

avec u et v des fct

D'après le tableau des dérivées : (*ligne 5*)

$g(x) = u + v \Longrightarrow g'(x) = u' + v'$

$g'(x) = (x^2 + 3x)' = (u + v)' = u' + v'$

$= (x^2)' + (3x)'$

lignes 2 et 1 $= 2x + 3$

le **coeff. directeur** de la tgte

au point d'abscisse -2 est $\mathbf{2(-2) + 3} = \mathbf{-1}$

3°) $h(x) = 4x^2 – 5x + 7$

le **coeff. directeur** de la tgte

au point d'abscisse -2 est **…**

3°) $h(x) = 4x^2 - 5x + 7$

$h'(x) = (4x^2 - 5x + 7)' = (4x^2)' + (- 5x + 7)'$

d'après $(u + v)' = u' + v'$ *ligne 5*

$v' = (- 5x + 7)' = \dots$

$u' = (4x^2)' = 4 (x^2)'$ d'après $(k\, w)' = k\, w'$ *ligne 4*

$h'(x) = (4x^2)' + (- 5x + 7)'$

$= 4 (x^2)' + (- 5x + 7)' = 4 (\dots) + \dots$

le **coeff. directeur** de la tgte

au point d'abscisse -2 est **…**

3°) $h(x) = 4x^2 - 5x + 7$

$h'(x) = (4x^2 - 5x + 7)' = (4x^2)' + (- 5x + 7)'$

d'après $(u + v)' = u' + v'$ *ligne 5*

$v' = (- 5x + 7)' = - 5$

$u' = (4x^2)' = 4 (x^2)'$ d'après $(k w)' = k w'$ *ligne 4*

$h'(x) = (4x^2)' + (- 5x + 7)'$

$= 4 (x^2)' + (- 5x + 7)' = 4 (2x) - 5 = 8x - 5$

le **coeff. directeur** de la tgte

au point d'abscisse -2 est **8(-2) – 5** = **- 21**

3°) $h(x) = 4x^2 - 5x + 7$

Copie simplifiée :

$$h'(x) = (4x^2 - 5x + 7)'$$

$$= 4(x^2)' + (-5x + 7)'$$

$$= 4(2x) - 5$$

$$= 8x - 5$$

le **coeff. directeur** de la tgte

au point d'abscisse -2 est **$8(-2) - 5$** = **- 21**

3°) $j(x) = 2x^3 – 5x^2 + 3x – 11$

le **coeff. directeur** de la tgte

au point d'abscisse -2 est **… ?**

3°) $j(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 11$

$$j'(x) = 2\,(x^3)' - 5\,(x^2)' + (3x - 11)'$$
$$= 2\,(3x^2) - 5\,(2x) + 3$$
$$= 6x^2 - 10x + 3$$

le **coeff. directeur** de la tgte

au point d'abscisse -2

est **$6(-2)^2 - 10(-2) + 3$**

$= 24 + 20 + 3 =$ **47**

Exo 9 bis

$f(x) = -5x^3 + 7x^2 + 2x - 6$

Déterminez

le **coeff. directeur** de la tgte

à la courbe de f

au point d'abscisse -1

Exo 9 bis $f(x) = -5x^3 + 7x^2 + 2x - 6$

Déterminez le **coeff. directeur** de la tgte à la courbe de f au point d'abscisse -1

Tableau des dérivées :

fonction f	dérivée f '
$ax + b$	a
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$k \times u$	$k \times u'$
$u + v$	$u' + v'$

$f(x) = -5x^3 + 7x^2 + 2x - 6$

$f'(x) = -5\,(x^3)' + 7\,(x^2)' + (2x - 6)'$

$= -5\,(3x^2) + 7\,(2x) + 2$

$= -15x^2 + 14x + 2$

coeff. directeur de la tgte

au point d'abscisse -1

$= -15(-1)^2 + 14(-1) + 2$

$= -15 - 14 + 2 =$ **- 27**