Exercice 3 :

1°) Un polynôme $ax^2 + bx + c$ peut avoir combien de racines ? Les valeurs numériques de ces racines sont des nombres de quel type ?

2°) Déterminez dans $\mathbb{C}$ les racines des polynômes suivants : $x^2 - 4$; $x^2 + 1$; $x^2 + 9$; $x^2 + 2x + 1$; $x^2 + 2x - 3$; $x^2 + 4x + 13$; $x^2 + 10x + 106$.
Indiquez leur type de nombre. Complétez la 1°).

3°) Soit le polynôme $P(x) = \mathbf{x^2 + 2bx + 25}$ (b est un réel). Pour quelles valeurs de b P(x) possède 2 racines réelles ? 1 racine réelle ? 0 racine réelle ?

4°) Déduisez-en les racines et leur type de nombre pour b = 5 b = 3 b = 13

Exercice 3 :

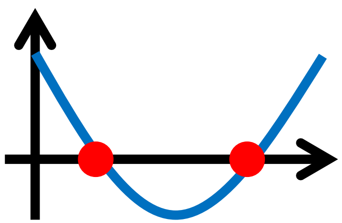
1°) Le polynôme $ax^2 + bx + c$ peut avoir combien de racines ?

Les valeurs numériques de ces racines sont des nombres de quel type ?

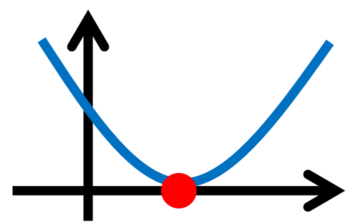
Exercice 3 :

1°) Le polynôme $ax^2 + bx + c$ peut avoir combien de racines ?

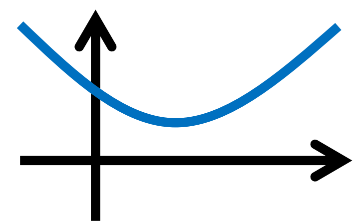
polynôme degré 2 → sa courbe est une parabole



2 racines



1 racine



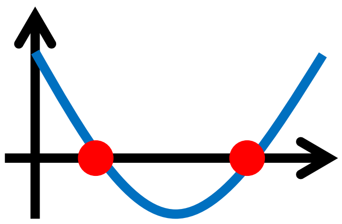
0 racine

Les valeurs numériques de ces racines sont des nombres de quel type ?

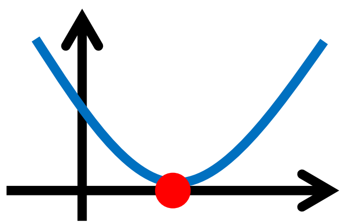
Exercice 3 :

1°) Le polynôme $ax^2 + bx + c$ peut avoir combien de racines ?

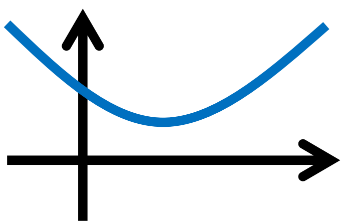
polynôme degré 2 ➡ sa courbe est une parabole



2 racines



1 racine



0 racine

Les valeurs numériques de ces racines sont des nombres de quel type ?

Ces racines sont les abscisses des points de la courbe sur l'axe x ➡ ces racines sont des réels

2°) Déterminez dans $\mathbb{C}$ les racines des polynômes suivants : $x^2 - 4$; $x^2 + 1$; $x^2 + 9$; $x^2 + 2x + 1$; $x^2 + 2x - 3$; $x^2 + 4x + 13$; $x^2 + 10x + 106$.

Indiquez leur type de nombre.

$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$ …

2°) Déterminez dans $\mathbb{C}$ les racines des polynômes suivants : $x^2 - 4$; $x^2 + 1$; $x^2 + 9$; $x^2 + 2x + 1$; $x^2 + 2x - 3$; $x^2 + 4x + 13$; $x^2 + 10x + 106$.

Indiquez leur type de nombre.

$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{4} = 2$

2°) Déterminez dans $\mathbb{C}$ les racines des polynômes suivants : $x^2 - 4$; $x^2 + 1$; $x^2 + 9$; $x^2 + 2x + 1$; $x^2 + 2x - 3$; $x^2 + 4x + 13$; $x^2 + 10x + 106$.

Indiquez leur type de nombre.

$x^2 - 4 = 0 \iff x^2 = 4 \iff x = \sqrt{4} = 2$ ou $x = -2$

deux racines réelles

2°) Déterminez dans $\mathbb{C}$ les racines des polynômes suivants : $x^2 - 4$; $x^2 + 1$; $x^2 + 9$; $x^2 + 2x + 1$; $x^2 + 2x - 3$; $x^2 + 4x + 13$; $x^2 + 10x + 106$.
Indiquez leur type de nombre.

$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{4} = 2$ ou $x = -2$

deux racines réelles

$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$

$\Rightarrow$ ...

2°) Déterminez dans C les racines des polynômes suivants : $x^2 - 4$; $x^2 + 1$; $x^2 + 9$; $x^2 + 2x + 1$; $x^2 + 2x - 3$; $x^2 + 4x + 13$; $x^2 + 10x + 106$.
Indiquez leur type de nombre.

$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{4} = 2$ ou $x = -2$

deux racines réelles

$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 < 0$

impossible (dans IR) $\Rightarrow$ pas de racines réelles

2°) Déterminez dans $\mathbb{C}$ les racines des polynômes suivants : $x^2 - 4$; $x^2 + 1$; $x^2 + 9$; $x^2 + 2x + 1$; $x^2 + 2x - 3$; $x^2 + 4x + 13$; $x^2 + 10x + 106$.

Indiquez leur type de nombre.

$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{4} = 2$ ou $x = -2$

deux racines réelles

$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 < 0$

impossible (dans $\mathbb{R}$) $\Rightarrow$ pas de racines réelles

$\Leftrightarrow x^2 = -1 = (\ \dots\ )^2$

2°) Déterminez dans $\mathbb{C}$ les racines des polynômes suivants : $x^2 - 4$; $x^2 + 1$; $x^2 + 9$; $x^2 + 2x + 1$; $x^2 + 2x - 3$; $x^2 + 4x + 13$; $x^2 + 10x + 106$.
Indiquez leur type de nombre.

$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{4} = 2$ ou $x = -2$

deux racines réelles

$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 < 0$

impossible (dans $\mathbb{R}$) $\Rightarrow$ pas de racines réelles

$\Leftrightarrow x^2 = -1 = i^2 \Leftrightarrow x = \ldots$

2°) Déterminez dans $\mathbb{C}$ les racines des polynômes suivants : $x^2 - 4$; $x^2 + 1$; $x^2 + 9$; $x^2 + 2x + 1$; $x^2 + 2x - 3$; $x^2 + 4x + 13$; $x^2 + 10x + 106$.

Indiquez leur type de nombre.

$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{4} = 2$ ou $x = -2$

deux racines réelles

$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 < 0$

impossible (dans $\mathbb{R}$) $\Rightarrow$ pas de racines réelles

$\Leftrightarrow x^2 = -1 = i^2 \Leftrightarrow x = i$ ou $x = -i$

deux racines imaginaires pures

2°) Déterminez dans $\mathbb{C}$ les racines des polynômes suivants : $x^2 - 4$; $x^2 + 1$; $x^2 + 9$; $x^2 + 2x + 1$; $x^2 + 2x - 3$; $x^2 + 4x + 13$; $x^2 + 10x + 106$.

$x^2 - 4 = 0 \iff x^2 = 4 \iff x = \sqrt{4} = 2$ ou $x = -2$

deux racines réelles

$x^2 + 1 = 0 \iff x^2 = -1 < 0$

impossible (dans IR) $\Longrightarrow$ pas de racines réelles

$\iff x^2 = -1 = i^2 \iff x = i$ ou $x = -i$

deux racines imaginaires pures

Remarque : n'écrivez pas $\sqrt{-1} = i$ pour ne pas contredire l'ensemble de définition $[\, 0 \,;\, +\infty \,[$ de la fonction racine carrée précédemment étudiée dans IR.

2°) Déterminez dans $\mathbb{C}$ les racines des polynômes suivants : $x^2 - 4$; $x^2 + 1$; $x^2 + 9$; $x^2 + 2x + 1$; $x^2 + 2x - 3$; $x^2 + 4x + 13$; $x^2 + 10x + 106$.

$x^2 - 4 = 0 \iff x^2 = 4 = 2^2 \iff x = 2$ ou $x = -2$

même dans IR il n'est pas nécessaire de l'utiliser deux racines réelles

$x^2 + 1 = 0 \iff x^2 = -1 < 0$

impossible (dans IR) $\Longrightarrow$ pas de racines réelles

$\iff x^2 = -1 = i^2 \iff x = i$ ou $x = -i$

deux racines imaginaires pures

Remarque : n'écrivez pas $\sqrt{-1} = i$ pour ne pas contredire l'ensemble de définition $[\,0\,;+\infty\,[$ de la fonction racine carrée précédemment étudiée dans IR.

2°) Déterminez dans $\mathbb{C}$ les racines des polynômes suivants : $x^2 + 2x + 1$; $x^2 + 2x - 3$; $x^2 + 4x + 13$; $x^2 + 10x + 106$.

$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 < 0$

impossible (dans $\mathbb{R}$) $\Rightarrow$ pas de racines réelles

$\Leftrightarrow x^2 = -1 = i^2 \Leftrightarrow x = i$ ou $x = -i$

deux racines imaginaires pures

$x^2 + 9 = 0$

2°) Déterminez dans $\mathbb{C}$ les racines des polynômes suivants : $x^2 + 2x + 1$; $x^2 + 2x - 3$; $x^2 + 4x + 13$; $x^2 + 10x + 106$.

$x^2 + 1 = 0 \iff x^2 = -1 < 0$

impossible (dans IR) $\Longrightarrow$ pas de racines réelles

$\iff x^2 = -1 = i^2 \iff x = i$ ou $x = -i$

deux racines imaginaires pures

$x^2 + 9 = 0 \iff x^2 = -9$

$\iff$ …

2°) Déterminez dans $\mathbb{C}$ les racines des polynômes suivants : $x^2 + 2x + 1$; $x^2 + 2x - 3$; $x^2 + 4x + 13$; $x^2 + 10x + 106$.

$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 < 0$

impossible (dans $\mathbb{R}$) $\Rightarrow$ pas de racines réelles

$\Leftrightarrow x^2 = -1 = i^2 \Leftrightarrow x = i$ ou $x = -i$

deux racines imaginaires pures

$x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -9 < 0$

impossible (dans $\mathbb{R}$) $\Rightarrow$ pas de racines réelles

$\Leftrightarrow x^2 = -9 = (\quad \ldots)^2$

2°) Déterminez dans $\mathbb{C}$ les racines des polynômes suivants : $x^2 + 2x + 1$; $x^2 + 2x - 3$; $x^2 + 4x + 13$; $x^2 + 10x + 106$.

$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 < 0$

impossible (dans $\mathbb{R}$) $\Rightarrow$ pas de racines réelles

$\Leftrightarrow x^2 = -1 = i^2 \Leftrightarrow x = i$ ou $x = -i$

deux racines imaginaires pures

$x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -9 < 0$

impossible (dans $\mathbb{R}$) $\Rightarrow$ pas de racines réelles

$\Leftrightarrow x^2 = -9 = (3i)^2 \Leftrightarrow$ ...

2°) Déterminez dans $\mathbb{C}$ les racines des polynômes suivants : $x^2 + 2x + 1$; $x^2 + 2x - 3$; $x^2 + 4x + 13$; $x^2 + 10x + 106$.

$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 < 0$

impossible (dans $\mathbb{R}$) $\Rightarrow$ pas de racines réelles

$\Leftrightarrow x^2 = -1 = i^2 \Leftrightarrow x = i$ ou $x = -i$

deux racines imaginaires pures

$x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -9 < 0$

impossible (dans $\mathbb{R}$) $\Rightarrow$ pas de racines réelles

$\Leftrightarrow x^2 = -9 = (3i)^2 \Leftrightarrow x = 3i$ ou $x = -3i$

deux racines imaginaires pures

2°) Déterminez dans $\mathbb{C}$ les racines des polynômes suivants : $x^2 + 2x - 3$; $x^2 + 4x + 13$; $x^2 + 10x + 106$.

$x^2 + 9 = 0 \iff x^2 = -9 < 0$

impossible (dans $\mathbb{R}$) $\Longrightarrow$ pas de racines réelles

$\iff x^2 = -9 = (3i)^2 \iff x = 3i$ ou $x = -3i$

deux racines imaginaires pures

$x^2 + 2x + 1 = 0 \iff$ ... ?

Comment rassembler les deux x ?

2°) Déterminez dans $\mathbb{C}$ les racines des polynômes suivants : $x^2 + 2x - 3$; $x^2 + 4x + 13$; $x^2 + 10x + 106$.

$x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -9 < 0$

impossible (dans $\mathbb{R}$) $\Rightarrow$ pas de racines réelles

$\Leftrightarrow x^2 = -9 = (3i)^2 \Leftrightarrow x = 3i$ ou $x = -3i$

deux racines imaginaires pures

$x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0$

identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$\Leftrightarrow$ …

2°) Déterminez dans $\mathbb{C}$ les racines des polynômes suivants : $x^2 + 2x - 3$; $x^2 + 4x + 13$; $x^2 + 10x + 106$.

$x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -9 < 0$

impossible (dans $\mathbb{R}$) $\Rightarrow$ pas de racines réelles

$\Leftrightarrow x^2 = -9 = (3i)^2 \Leftrightarrow x = 3i$ ou $x = -3i$

deux racines imaginaires pures

$x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0$

identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$\Leftrightarrow x + 1 = 0 \qquad x = -1$ une racine réelle

2°) Déterminez dans $\mathbb{C}$ les racines des polynômes suivants : $x^2 + 2x - 3$; $x^2 + 4x + 13$; $x^2 + 10x + 106$.

$x^2 + 2x + 1 = 0 \iff (x + 1)^2 = 0$

identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$\iff x + 1 = 0 \iff x = -1$ une racine réelle

$x^2 + 2x - 3 = 0 \iff x^2 + 2x + \ldots - \ldots - 3 = 0$

2°) Déterminez dans $\mathbb{C}$ les racines des polynômes suivants : $x^2 + 2x - 3$; $x^2 + 4x + 13$; $x^2 + 10x + 106$.

$x^2 + 2x + 1 = 0 \iff (x + 1)^2 = 0$

identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$\iff x + 1 = 0 \iff x = -1$ une racine réelle

$x^2 + 2x - 3 = 0 \iff x^2 + 2x \underbrace{+ \ldots - \ldots}_{0} - 3 = 0$

pour pouvoir retomber sur $x^2 + 2x - 3$

et avoir l'identité remarquable $x^2 + 2x + \ldots$

2°) Déterminez dans $\mathbb{C}$ les racines des polynômes suivants : $x^2 + 2x - 3$; $x^2 + 4x + 13$; $x^2 + 10x + 106$.

$x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0$

identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$\Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ une racine réelle

$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + \underbrace{1 - 1}_{0} - 3 = 0$

pour pouvoir retomber sur $x^2 + 2x - 3$

et avoir l'identité remarquable $x^2 + 2x + 1$

2°) Déterminez dans $\mathbb{C}$ les racines des polynômes suivants : $x^2 + 2x - 3$; $x^2 + 4x + 13$; $x^2 + 10x + 106$.

$x^2 + 2x + 1 = 0 \iff (x + 1)^2 = 0$

identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$\iff x + 1 = 0 \iff x = -1$ une racine réelle

$x^2 + 2x - 3 = 0 \iff x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 = 0$

$\iff \ldots$

2°) Déterminez dans $\mathbb{C}$ les racines des polynômes suivants : $x^2 + 2x - 3$; $x^2 + 4x + 13$; $x^2 + 10x + 106$.

$x^2 + 2x + 1 = 0 \iff (x + 1)^2 = 0$

identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$\iff x + 1 = 0 \iff x = -1$ une racine réelle

$x^2 + 2x - 3 = 0 \iff x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 = 0$

$\iff (x + 1)^2 - 4 = 0 \iff \ldots$

2°) Déterminez dans $\mathbb{C}$ les racines des polynômes suivants : $x^2 + 2x - 3$; $x^2 + 4x + 13$; $x^2 + 10x + 106$.

$x^2 + 2x + 1 = 0 \iff (x + 1)^2 = 0$

identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$\iff x + 1 = 0 \iff x = -1$ une racine réelle

$x^2 + 2x - 3 = 0 \iff x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 = 0$

$\iff (x + 1)^2 - 4 = 0 \iff (x + 1)^2 = 4$

$\iff \dots$

2°) Déterminez dans $\mathbb{C}$ les racines des polynômes suivants : $x^2 + 2x - 3$; $x^2 + 4x + 13$; $x^2 + 10x + 106$.

$x^2 + 2x + 1 = 0 \iff (x + 1)^2 = 0$

identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$\iff x + 1 = 0 \iff x = -1$ une racine réelle

$x^2 + 2x - 3 = 0 \iff x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 = 0$

$\iff (x + 1)^2 - 4 = 0 \iff (x + 1)^2 = 4 = 2^2$

$\iff x + 1 = 2$ ou $x + 1 = -2$

$\iff x = 1$ ou $x = -3$ deux racines réelles

$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 4 = 2^2$

$\Leftrightarrow$ $x + 1 = 2$ ou $x + 1 = -2$

$\Leftrightarrow$ $x = 1$ ou $x = -3$ deux racines réelles

$x^2 + 4x + 13 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2(2)x + \ldots - \ldots + 13 = 0$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 4 = 2^2$$

$\Leftrightarrow x + 1 = 2$ ou $x + 1 = -2$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -3$ deux racines réelles

$$x^2 + 4x + 13 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2(2)x + \underbrace{2^2 - 4}_{0} + 13 = 0$$

pour pouvoir retomber sur $x^2 + 4x + 13$

et avoir l'identité remarquable $x^2 + 4x + 4$

$a^2 + 2ab + b^2$

$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 4 = 2^2$

$\Leftrightarrow x + 1 = 2$ ou $x + 1 = -2$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -3$ deux racines réelles

$x^2 + 4x + 13 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2(2)x + 2^2 - 4 + 13 = 0$

$\Leftrightarrow \ldots$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Longleftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 = 0$$

$$\Longleftrightarrow (x + 1)^2 - 4 = 0 \Longleftrightarrow (x + 1)^2 = 4 = 2^2$$

$$\Longleftrightarrow x + 1 = 2 \quad \text{ou} \quad x + 1 = -2$$

$$\Longleftrightarrow x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -3$$

deux racines réelles

$$x^2 + 4x + 13 = 0 \Longleftrightarrow x^2 + 2(2)x + 2^2 - 4 + 13 = 0$$

$$\Longleftrightarrow (x + 2)^2 + 9 = 0 \Longleftrightarrow \ldots$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 4 = 2^2$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 2 \quad \text{ou} \quad x + 1 = -2$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -3$$ deux racines réelles

$$x^2 + 4x + 13 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2(2)x + 2^2 - 4 + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = -9$$

$$\Leftrightarrow \ldots$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 4 = 2^2$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 2 \quad \text{ou} \quad x + 1 = -2$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -3$$ deux racines réelles

$$x^2 + 4x + 13 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2(2)x + 2^2 - 4 + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = -9 < 0$$

impossible (dans $\mathbb{R}$) $\Rightarrow$ aucune solution réelle

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 = -9 = (\dots \quad)^2$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 4 = 2^2$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 2 \quad \text{ou} \quad x + 1 = -2$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -3$$

deux racines réelles

$$x^2 + 4x + 13 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2(2)x + 2^2 - 4 + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = -9 < 0$$

impossible (dans $\mathbb{R}$) $\Rightarrow$ aucune solution réelle

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 = -9 = (3i)^2$$

$$\Leftrightarrow \ldots$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 4 = 2^2$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 2 \quad \text{ou} \quad x + 1 = -2$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -3$$

deux racines réelles

$$x^2 + 4x + 13 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2(2)x + 2^2 - 4 + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = -9 < 0$$

impossible (dans $\mathbb{R}$) $\Rightarrow$ aucune solution réelle

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 = -9 = (3i)^2$$

$$\Leftrightarrow x + 2 = 3i \quad \text{ou} \quad x + 2 = -3i$$

$$\Leftrightarrow x = -2 + 3i \quad \text{ou} \quad x = -2 - 3i$$

deux racines complexes non réelles

$x^2 + 4x + 13 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2(2)x + 2^2 - 4 + 13 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = -9 < 0$

impossible (dans IR) $\Rightarrow$ aucune solution réelle

$\Leftrightarrow (x + 2)^2 = -9 = (3i)^2$

$\Leftrightarrow x + 2 = 3i$ ou $x + 2 = -3i$

$\Leftrightarrow x = -2 + 3i$ ou $x = -2 - 3i$

deux racines complexes non réelles

Complétez la question 1°.

$x^2 + 4x + 13 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2(2)x + 2^2 - 4 + 13 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = -9 < 0$

impossible (dans IR) $\Rightarrow$ aucune solution réelle

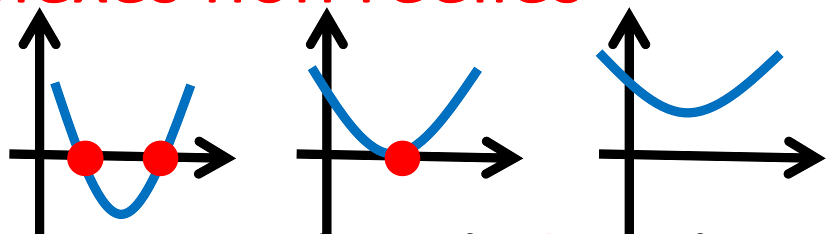
$\Leftrightarrow (x + 2)^2 = -9 = (3i)^2$

$\Leftrightarrow x + 2 = 3i$ ou $x + 2 = -3i$

$\Leftrightarrow x = -2 + 3i$ ou $x = -2 - 3i$

deux racines complexes non réelles

Complétez la question 1°.



Un polynôme $ax^2 + bx + c$ peut avoir soit 2, soit 1, soit 0 racines réelles (qui sont des abscisses de points)

$x^2 + 4x + 13 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2(2)x + 2^2 - 4 + 13 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = -9 < 0$

impossible (dans $\mathbb{R}$) $\Rightarrow$ aucune solution réelle

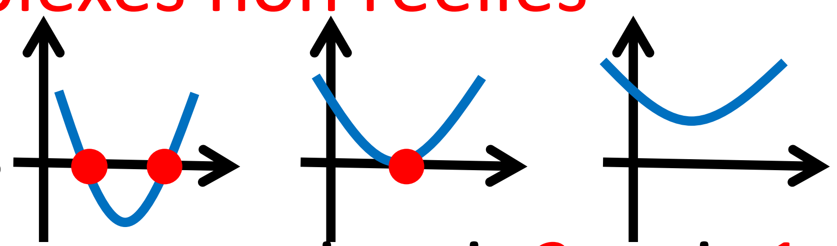
$\Leftrightarrow (x + 2)^2 = -9 = (3i)^2$

$\Leftrightarrow x + 2 = 3i$ ou $x + 2 = -3i$

$\Leftrightarrow x = -2 + 3i$ ou $x = -2 - 3i$

deux racines complexes non réelles

Complétez la question 1°.



Un polynôme $ax^2 + bx + c$ peut avoir soit 2, soit 1, soit 0 racines réelles (qui sont des abscisses de points), et dans ce cas 2 racines non réelles.

$x^2 + 10x + 106 = 0$

$\Leftrightarrow \ldots \qquad + 106 = 0$

$$x^2 + 10x + 106 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2(5)x + 5^2 - 5^2 + 106 = 0$$

$$\Leftrightarrow \dots \qquad = -106 + 25$$

$$x^2 + 10x + 106 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2(5)x + 5^2 - 5^2 + 106 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 5)^2 = -106 + 25$$

$x^2 + 10x + 106 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2(5)x + 5^2 - 5^2 + 106 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 5)^2 = -106 + 25 = -81 < 0$

impossible (dans $\mathbb{R}$) $\Rightarrow$ aucune solution réelle

$$x^2 + 10x + 106 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2(5)x + 5^2 - 5^2 + 106 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 5)^2 = -106 + 25 = -81 < 0$$

impossible (dans $\mathbb{R}$) $\Rightarrow$ aucune solution réelle

$$(x + 5)^2 = -106 + 25 = -81 = (\ldots \quad)^2$$

$$x^2 + 10x + 106 = 0$$

$$\Longleftrightarrow x^2 + 2(5)x + 5^2 - 5^2 + 106 = 0$$

$$\Longleftrightarrow (x + 5)^2 = -106 + 25 = -81 < 0$$

impossible (dans $\mathbb{R}$) $\Longrightarrow$ aucune solution réelle

$$(x + 5)^2 = -106 + 25 = -81 = (9i)^2$$

$$\Longleftrightarrow x \ldots$$

$$x^2 + 10x + 106 = 0$$

$$\Longleftrightarrow x^2 + 2(5)x + 5^2 - 5^2 + 106 = 0$$

$$\Longleftrightarrow (x + 5)^2 = -106 + 25 = -81 < 0$$

impossible (dans $\mathbb{R}$) $\Longrightarrow$ aucune solution réelle

$$(x + 5)^2 = -106 + 25 = -81 = (9i)^2$$

$$\Longleftrightarrow x + 5 = 9i \quad \text{ou} \quad x + 5 = -9i$$

$$\Longleftrightarrow x = -5 + 9i \quad \text{ou} \quad x = -5 - 9i$$

deux solutions complexes non réelles

Exercice 3 :

3°) $P(x) = x^2 + 2bx + 25$ (b est un réel)

Pour quelles valeurs de b

P(x) possède 2 racines réelles ?

1 racine réelle ? 0 racine réelle ?

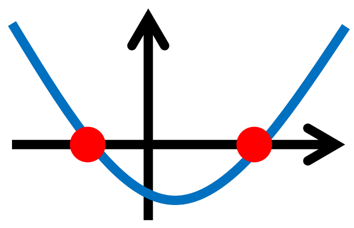
3°)

$P(x) = x^2 + 2bx + 25$ (b est un réel)

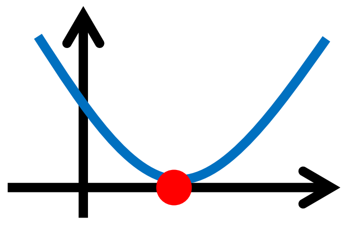
polynôme degré 2 $\Rightarrow$ parabole

Pour quelles valeurs de b

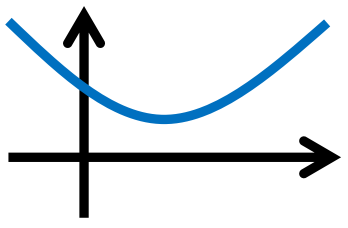
P(x) possède 2 racines réelles ?



1 racine réelle ?



0 racine réelle ?



3°) $P(x) = x^2 + 2bx + 25$

Seule façon de trouver les valeurs numériques *exactes* de b : … ?

3°) $P(x) = x^2 + 2bx + 25$

Seule façon de trouver les valeurs numériques *exactes* de b : recherche *algébrique* des racines.

x est une *racine* de P(x) $\Leftrightarrow$ x …

3°) $P(x) = x^2 + 2bx + 25$

Seule façon de trouver les valeurs numériques *exactes* de b : recherche *algébrique* des racines.

x est une *racine* de P(x) $\Leftrightarrow$ x annule le polynôme

$\Leftrightarrow$ $x^2 + 2bx + 25 = 0$

Seule façon de rassembler l'inconnue x écrite deux fois :

…

3°) $P(x) = x^2 + 2bx + 25$

Seule façon de trouver les valeurs numériques *exactes* de b : recherche *algébrique* des racines.

x est une *racine* de P(x) $\Leftrightarrow$ x annule le polynôme

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2bx + 25 = 0$

Seule façon de rassembler l'inconnue x écrite deux fois : l'identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$x^2 + 2bx + 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2bx + \ldots \qquad + 25 = 0$

3°) $P(x) = x^2 + 2bx + 25$

Seule façon de trouver les valeurs numériques *exactes* de b : recherche *algébrique* des racines.

x est une *racine* de P(x) $\Longleftrightarrow$ x annule le polynôme

$\Longleftrightarrow$ $x^2 + 2bx + 25 = 0$

Seule façon de rassembler l'inconnue x écrite deux fois :

l'identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$$x^2 + 2bx + 25 = 0 \Longleftrightarrow x^2 + 2bx + \underbrace{b^2 - b^2}_{0} + 25 = 0$$

pour pouvoir retomber sur $x^2 + 2bx + 25$

et avoir l'identité remarquable $x^2 + 2bx + b^2$

3°) $P(x) = x^2 + 2bx + 25$

Seule façon de trouver les valeurs numériques *exactes* de b : recherche *algébrique* des racines.

x est une *racine* de P(x) $\Leftrightarrow$ x annule le polynôme

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2bx + 25 = 0$

Seule façon de rassembler l'inconnue x écrite deux fois : l'identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$x^2 + 2bx + 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2bx + b^2 - b^2 + 25 = 0$

$\Leftrightarrow \ldots$

3°) P(x) = $x^2 + 2bx + 25$

Seule façon de trouver les valeurs numériques *exactes* de b : recherche *algébrique* des racines.

x est une *racine* de P(x) $\Leftrightarrow$ x annule le polynôme

$\Leftrightarrow$ $x^2 + 2bx + 25 = 0$

Seule façon de rassembler l'inconnue x écrite deux fois : l'identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$x^2 + 2bx + 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2bx + b^2 - b^2 + 25 = 0$

$\Leftrightarrow (x + b)^2 - b^2 + 25 = 0$

3°) $P(x) = x^2 + 2bx + 25$

x est une *racine* de $P(x)$ $\Leftrightarrow$ x annule le polynôme

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2bx + 25 = 0$

Seule façon de rassembler l'inconnue x écrite deux fois :
l'identité remarquable $\quad a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$x^2 + 2bx + 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2bx + b^2 - b^2 + 25 = 0$

$\Leftrightarrow (x + b)^2 - b^2 + 25 = 0$

$\Leftrightarrow (x + b)^2 = 25 - b^2$

A quel moment la séparation se fera-t-elle entre les 0, 1 et 2 racines ?

3°) $P(x) = x^2 + 2bx + 25$

x est une *racine* de $P(x)$ $\Leftrightarrow$ x annule le polynôme

$\Leftrightarrow$ $x^2 + 2bx + 25 = 0$

Seule façon de rassembler l'inconnue x écrite deux fois :

l'identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$x^2 + 2bx + 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2bx + b^2 - b^2 + 25 = 0$

$\Leftrightarrow (x + b)^2 - b^2 + 25 = 0$

$\Leftrightarrow (x + b)^2 = 25 - b^2$

$(x + b)^2 \geq 0$ car c'est un carré.

$25 - b^2$ est-il ≥ 0 ? < 0 ?

3°) $P(x) = x^2 + 2bx + 25$

$P(x) = 0 \iff (x + b)^2 = 25 - b^2$

$(x + b)^2 \geq 0$ car c'est un carré. $25 - b^2$ est-il ≥ 0 ? < 0 ?

Etude du signe de $25 - b^2$:

$25 - b^2 = 0 \iff - b^2 = 0 - 25 \iff b^2 = 25$

$\iff b = 5$ ou $b = - 5$

3°) $P(x) = x^2 + 2bx + 25$

$P(x) = 0 \Longleftrightarrow (x + b)^2 = 25 - b^2$

$(x + b)^2 \geq 0$ car c'est un carré. $25 - b^2$ est-il ≥ 0 ? < 0 ?

Etude du signe de $25 - b^2$:

$25 - b^2 = 0 \Longleftrightarrow -b^2 = 0 - 25 \Longleftrightarrow b^2 = 25$

$\Longleftrightarrow b = 5$ ou $b = -5$

$25 - b^2 < 0 \Longleftrightarrow -b^2 < 0 - 25 \Longleftrightarrow b^2 > 25$

car diviser par le négatif - 1 inverse l'ordre

3°) $P(x) = x^2 + 2bx + 25$

$P(x) = 0 \iff (x + b)^2 = 25 - b^2$

$(x + b)^2 \geq 0$ car c'est un carré. $25 - b^2$ est-il ≥ 0 ? < 0 ?

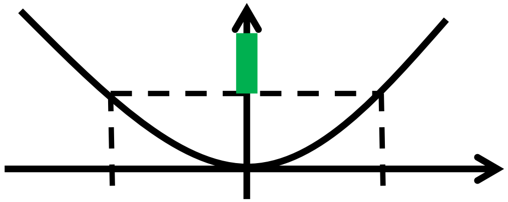
Etude du signe de $25 - b^2$:

$25 - b^2 = 0 \iff -b^2 = 0 - 25 \iff b^2 = 25$

$\iff b = 5$ ou $b = -5$

$25 - b^2 < 0 \iff -b^2 < 0 - 25 \iff b^2 > 25$

$\iff b$ ...



3°) $P(x) = x^2 + 2bx + 25$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x + b)^2 = 25 - b^2$

$(x + b)^2 \geq 0$ car c'est un carré. $25 - b^2$ est-il ≥ 0 ? < 0 ?

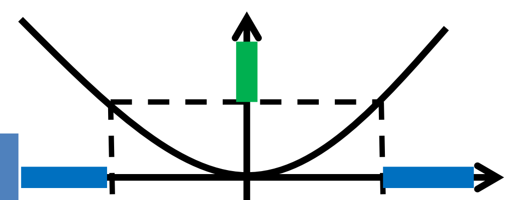
Etude du signe de $25 - b^2$:

$25 - b^2 = 0 \Leftrightarrow - b^2 = 0 - 25 \Leftrightarrow b^2 = 25$

$\Leftrightarrow b = 5$ ou $b = - 5$

$25 - b^2 < 0 \Leftrightarrow - b^2 < 0 - 25 \Leftrightarrow b^2 > 25$

$\Leftrightarrow b < - 5$ ou $b > 5$



x	- ∞		- 5		5		+ ∞
$25 - b^2$		–	0		0	–	

3°) $P(x) = x^2 + 2bx + 25$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x + b)^2 = 25 - b^2$

$(x + b)^2 \geq 0$ car c'est un carré. $25 - b^2$ est-il ≥ 0 ? < 0 ?

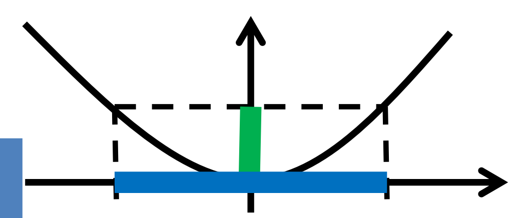
Etude du signe de $25 - b^2$:

$25 - b^2 = 0 \Leftrightarrow - b^2 = 0 - 25 \Leftrightarrow b^2 = 25$

$\Leftrightarrow b = 5$ ou $b = - 5$

$25 - b^2 > 0 \Leftrightarrow - b^2 > 0 - 25 \Leftrightarrow b^2 < 25$

$\Leftrightarrow - 5 < b < - 5$



x	$-\infty$		-5		5		$+\infty$
$25 - b^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3°) P(x) = $x^2 + 2bx + 25$

$P(x) = 0 \iff (x + b)^2 = 25 - b^2$

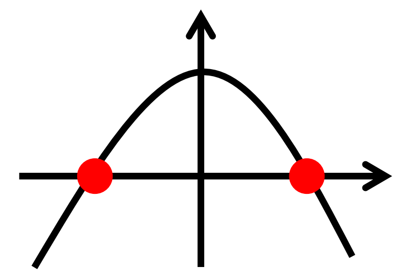
$(x + b)^2 \geq 0$ car c'est un carré. $25 - b^2$ est-il ≥ 0 ? < 0 ?

Etude du signe de $25 - b^2$:

Autre méthode :

$25 - b^2 = -1\,b^2 + 0b + 25$ est un polynôme degré 2

$\Rightarrow$ sa courbe est une parabole



Elle est orientée vers le bas car $-1 < 0$

P(x) s'annule en 5 et - 5 (voir étude précédente)

Conclusion :

x	$-\infty$		-5		5		$+\infty$
$25 - b^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3°) $P(x) = x^2 + 2bx + 25$

$P(x) = 0 \iff (x + b)^2 = 25 - b^2$

x	$-\infty$		-5		5		$+\infty$
$25 - b^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Réponse :

cas 1 : b est dans $]-5\,;5[$ ⇨ $25 - b^2 > 0$

⇨ il y a 2 réels $(x + b)$ dont le carré est $25 - b^2$

cas 2 : b est dans $\{-5\,;5\}$ ⇨ $25 - b^2 = 0$

⇨ il y a 1 réel $(x + b)$ dont le carré est $25 - b^2$

cas 3 : b est dans $]-\infty\,;-5[\,\cup\,]5\,;+\infty[$ ⇨ $25 - b^2 < 0$

⇨ il y a 0 réel $(x + b)$ dont le carré est $25 - b^2$

3°) $P(x) = x^2 + 2bx + 25$

$P(x) = 0 \iff (x + b)^2 = 25 - b^2$

Réponse :

x	$-\infty$		-5		5		$+\infty$
$25 - b^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
n^b de racines réelles		0	1	2	1	0	

cas 1 : b est dans $]-5\,;5[$ ⇒ $25 - b^2 > 0$

⇒ il y a 2 réels $(x + b)$ dont le carré est $25 - b^2$

cas 2 : b est dans $\{-5\,;5\}$ ⇒ $25 - b^2 = 0$

⇒ il y a 1 réel $(x + b)$ dont le carré est $25 - b^2$

cas 3 : b est dans $]-\infty\,;-5[\,\cup\,]5\,;+\infty[$ ⇒ $25 - b^2 < 0$

⇒ il y a 0 réel $(x + b)$ dont le carré est $25 - b^2$

$$P(x) = x^2 + 2bx + 25$$

4°) Application $b = 5$.

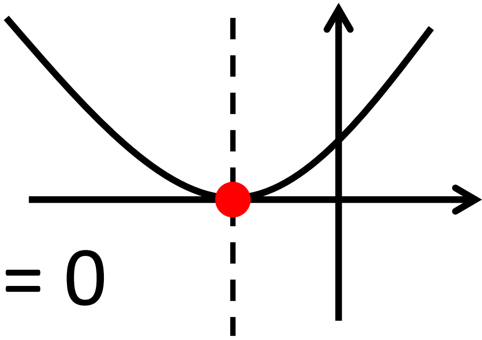
$$P(x) = x^2 + 10x + 25 = 0$$

$\Leftrightarrow (x + 5)^2 = 25 - 5^2 \Leftrightarrow (x + 5)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$ une solution réelle

$P(x) = x^2 + 2bx + 25$

4°) Application b = 5.



$P(x) = x^2 + 10x + 25 = 0$

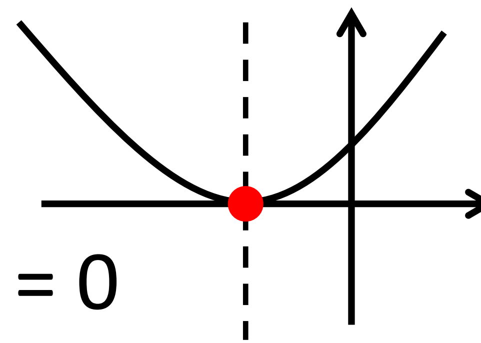
$\Leftrightarrow \quad (x + 5)^2 = 25 - 5^2 \Leftrightarrow (x + 5)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$ une solution réelle

$$P(x) = x^2 + 2bx + 25$$

4°) Application

b = 5.

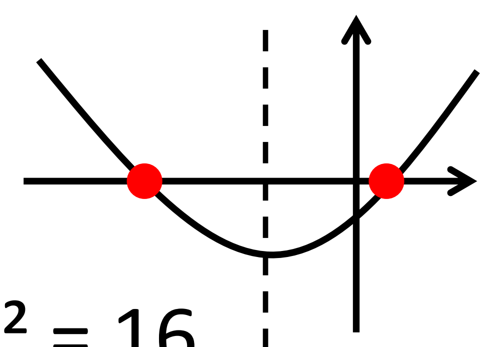


$P(x) = x^2 + 10x + 25 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x + 5)^2 = 25 - 5^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 5)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -5$ une solution réelle

b = 3



$P(x) = x^2 + 6x + 25 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x + 3)^2 = 25 - 3^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 3)^2 = 16$

$\Leftrightarrow \quad x + 3 = 4$ ou $x + 3 = -4$

$\Leftrightarrow \quad x = 1$ ou $x = -7$ deux solutions réelles

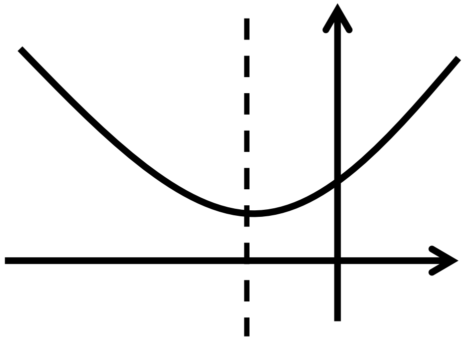
$$P(x) = x^2 + 2bx + 25$$

$$b = 13$$

$$P(x) = x^2 + 26x + 25 = 0$$

$\Leftrightarrow \quad (x + 13)^2 = 25 - 13^2$

$\Leftrightarrow \quad (x + 13)^2 = -144 < 0$

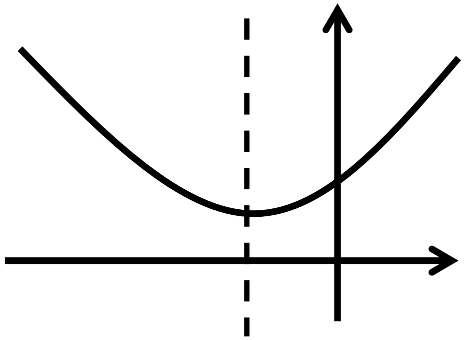


impossible (dans $\mathbb{R}$) $\Rightarrow$ aucune solution réelle

$$P(x) = x^2 + 2bx + 25$$

$b = 13$

$$P(x) = x^2 + 26x + 25 = 0$$



$\Leftrightarrow \quad (x + 13)^2 = 25 - 13^2$

$\Leftrightarrow \quad (x + 13)^2 = -144 < 0$

impossible (dans $\mathbb{R}$) $\Rightarrow$ aucune solution réelle

$\Leftrightarrow \quad (x + 13)^2 = -144 = (12i)^2$

$\Leftrightarrow \quad x + 13 = 12i \quad$ ou $\quad x + 13 = -12i$

$\Leftrightarrow \quad x = -13 + 12i \quad$ ou $\quad x = -13 - 12i$

deux solutions complexes non réelles