

Exercice 3 : Soit la fonction f
définie sur $[-5 ; 1]$

$$\text{par } f(x) = \frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x}$$

- 1°) Déterminez ses sens de variation.
- 2°) Déterminez ses signes.
- 3°) Déterminez ses extremums.

1°) Sens de variation :

$$f'(x) = \left[\frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x} \right]' = \dots ?$$

1°) Sens de variation :

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x} \right)' = \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

1°) Sens de variation :

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x} \right)' = \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$u = 2x^2 + 13x - 13 \quad \longrightarrow \quad u' = \dots ?$$

$$v = 5 - 3x \quad \longrightarrow \quad v' = \dots ?$$

1°) Sens de variation :

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x} \right)' = \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$u = 2x^2 + 13x - 13 \quad \longrightarrow \quad u' = 2(x^2)' + (13x - 13)'$$
$$= 2(2x) + (13) = 4x + 13$$

$$v = 5 - 3x = -3x + 5 \quad \longrightarrow \quad v' = -3$$

1°) Sens de variation :

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x} \right)' = \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$u' = 2(x^2)' + (13x - 13)' = 2(2x) + 13 = 4x + 13$$

$$v = 5 - 3x = -3x + 5 \quad \longrightarrow \quad v' = -3$$

$$f'(x) = \dots ?$$

1°) Sens de variation :

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x} \right)' = \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$u' = 2(x^2)' + (13x - 13)' = 2(2x) + 13 = 4x + 13$$

$$v = 5 - 3x = -3x + 5 \quad \longrightarrow \quad v' = -3$$

$$f'(x) = \frac{(4x + 13)(5 - 3x) - (-3)(2x^2 + 13x - 13)}{(5 - 3x)^2}$$

1°) Sens de variation :

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x} \right)' = \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$
$$= \frac{(4x + 13)(5 - 3x) - (-3)(2x^2 + 13x - 13)}{(5 - 3x)^2}$$

... ?

$$= \frac{\quad}{(5 - 3x)^2}$$

1°) Sens de variation :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x} \right)' = \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \\ &= \frac{(4x + 13)(5 - 3x) - (-3)(2x^2 + 13x - 13)}{(5 - 3x)^2} \\ &= \frac{20x + 65 - 12x^2 - 39x + 6x^2 + 39x - 39}{(5 - 3x)^2} \end{aligned}$$

1°) Sens de variation :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x} \right)' = \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \\ &= \frac{(4x + 13)(5 - 3x) - (-3)(2x^2 + 13x - 13)}{(5 - 3x)^2} \\ &= \frac{-6x^2 + 20x + 26}{(5 - 3x)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 20x + 26}{(5 - 3x)^2} = \frac{g(x)}{(5 - 3x)^2}$$

Signes du dénominateur :

... ?

Signes du numérateur $g(x)$:

... ?

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 20x + 26}{(5 - 3x)^2} = \frac{g(x)}{(5 - 3x)^2}$$

Le **dénominateur** est toujours positif car est un carré.
Il ne s'annule qu'en $5/3$ qui n'appartient pas à $[-5; 1]$.

Signes du numérateur $g(x)$:

... ?

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 20x + 26}{(5 - 3x)^2} = \frac{g(x)}{(5 - 3x)^2}$$

Le **dénominateur** est toujours positif car est un carré.
 Il ne s'annule qu'en $5/3$ qui n'appartient pas à $[-5; 1]$.

Signes du numérateur $g(x)$:

C'est un polynôme degré 2 $ax^2 + bx + c$

donc on ne peut pas résoudre algébriquement

$$g(x) = 0 \quad g(x) < 0 \quad g(x) > 0$$

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 20x + 26}{(5 - 3x)^2} = \frac{g(x)}{(5 - 3x)^2}$$

Le **dénominateur** est toujours positif car est un carré.
 Il ne s'annule qu'en $5/3$ qui n'appartient pas à $[-5; 1]$.

Signes du numérateur $g(x)$:

C'est un polynôme degré 2 $ax^2 + bx + c$

donc on ne peut pas résoudre algébriquement

$$g(x) = 0 \quad g(x) < 0 \quad g(x) > 0$$

polynôme degré 2 \Rightarrow sa courbe est une **parabole**

$a = -6 < 0$ \Rightarrow la parabole est **orientée vers la bas**

On utilise la **symétrie d'axe vertical**. Connait-on 2 antécédents ayant la même image ?

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 20x + 26}{(5 - 3x)^2} = \frac{g(x)}{(5 - 3x)^2}$$

Signes du numérateur $g(x)$:

C'est un polynôme degré 2 $ax^2 + bx + c$

donc on ne peut pas résoudre algébriquement

$$g(x) = 0 \quad g(x) < 0 \quad g(x) > 0$$

polynôme degré 2 \Rightarrow sa courbe est une **parabole**

$a = -6 < 0$ \Rightarrow la parabole est **orientée vers la bas**

On utilise la **symétrie d'axe vertical**. Connaît-on 2 antécédents ayant la même image ?

Utilisation de la calculatrice :

Utilisation de la calculatrice graphique.

$$D_f = [- 5 ; 1]$$

$$g(x) = - 6x^2 + 20x + 26$$

Menu → Graph

On tape l'expression de $g(x)$ dans Y1=

Shift Windows → Xmini = -3 EXE Xmaxi = 1 EXE EXIT

Draw,

puis Shift Zoom Auto ou Shift Windows → Ymini et Ymaxi pour ajuster (si nécessaire) la taille verticale de l'écran.

Shift Zoom Box pour obtenir des Zoom (si les pixels sont horizontaux).

Shift Trace pour lire des coordonnées.

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 20x + 26}{(5 - 3x)^2} = \frac{g(x)}{(5 - 3x)^2}$$

Signes du numérateur $g(x)$:

C'est un polynôme degré 2 $ax^2 + bx + c$

donc on ne peut pas résoudre algébriquement

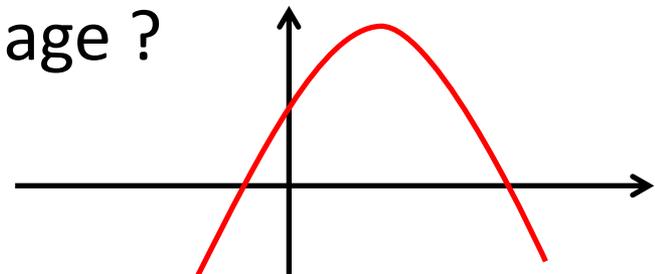
$$g(x) = 0 \quad g(x) < 0 \quad g(x) > 0$$

polynôme degré 2 \Rightarrow sa courbe est une **parabole**

$a = -6 < 0$ \Rightarrow la parabole est **orientée vers la bas**

On utilise la **symétrie d'axe vertical**. Connait-on 2 antécédents ayant la même image ?

Utilisation de la calculatrice :



$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 20x + 26}{(5 - 3x)^2} = \frac{g(x)}{(5 - 3x)^2}$$

Signes du numérateur $g(x)$:

C'est un polynôme degré 2 $ax^2 + bx + c$

donc on ne peut pas résoudre algébriquement

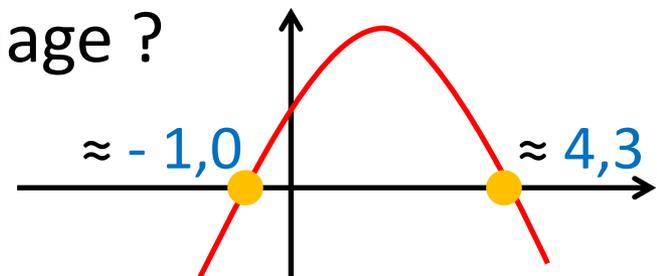
$$g(x) = 0 \quad g(x) < 0 \quad g(x) > 0$$

polynôme degré 2 \Rightarrow sa courbe est une **parabole**

$a = -6 < 0$ \Rightarrow la parabole est **orientée vers la bas**

On utilise la **symétrie d'axe vertical**. Connaît-on 2 antécédents ayant la même image ?

Utilisation de la calculatrice :

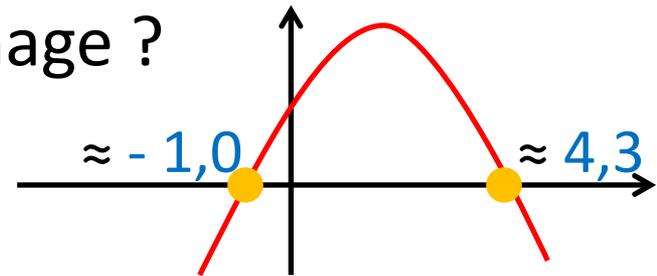


$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 20x + 26}{(5 - 3x)^2} = \frac{g(x)}{(5 - 3x)^2}$$

Signes du numérateur $g(x)$:

On utilise la **symétrie d'axe vertical**. Connaît-on 2 antécédents ayant la même image ?

Utilisation de la calculatrice :



Lorsque l'on augmente la précision on obtient

$$x_1 \approx -1,0000 \quad \text{et} \quad x_2 \approx 4,3333$$

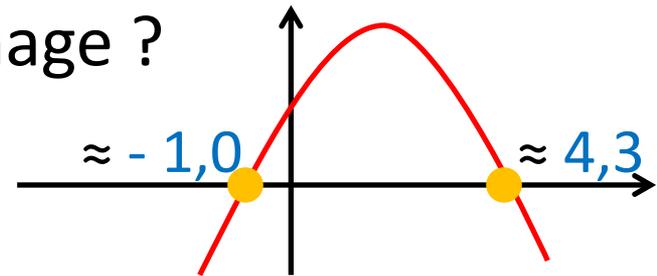
N'aurait-on pas ... ?

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 20x + 26}{(5 - 3x)^2} = \frac{g(x)}{(5 - 3x)^2}$$

Signes du numérateur $g(x)$:

On utilise la **symétrie d'axe vertical**. Connaît-on 2 antécédents ayant la même image ?

Utilisation de la calculatrice :



Lorsque l'on augmente la précision on obtient

$$x_1 \approx -1,0000 \quad \text{et} \quad x_2 \approx 4,3333$$

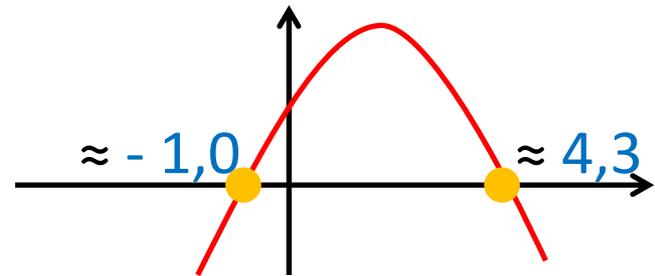
N'aurait-on pas $x_1 = -1$ et $x_2 = 4 + 1/3 = 13/3$?

On peut répondre à cette question en faisant ...

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 20x + 26}{(5 - 3x)^2} = \frac{g(x)}{(5 - 3x)^2}$$

Signes du numérateur $g(x)$:

Utilisation de la calculatrice :



Lorsque l'on augmente la précision on obtient

$$x_1 \approx -1,0000 \quad \text{et} \quad x_2 \approx 4,3333$$

N'aurait-on pas $x_1 = -1$ et $x_2 = 4 + 1/3 = 13/3$?

$$g(-1) = -6(-1)^2 + 20(-1) + 26 = -6(1) - 20 + 26 = 0$$

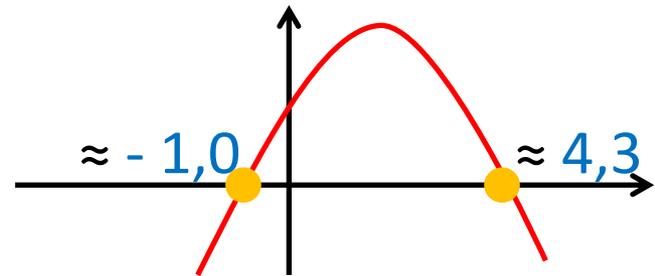
$$\longrightarrow x_1 = -1$$

$g(13/3)$ n'existe pas car $13/3$ n'est pas dans $[-5; 1]$.

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 20x + 26}{(5 - 3x)^2} = \frac{g(x)}{(5 - 3x)^2}$$

Signes du numérateur $g(x)$:

Utilisation de la calculatrice :



N'aurait-on pas $x_1 = -1$ et $x_2 = 4 + 1/3 = 13/3$?

$$g(-1) = -6(-1)^2 + 20(-1) + 26 = -6(1) - 20 + 26 = 0$$

➡ $x_1 = -1$

Conclusion :

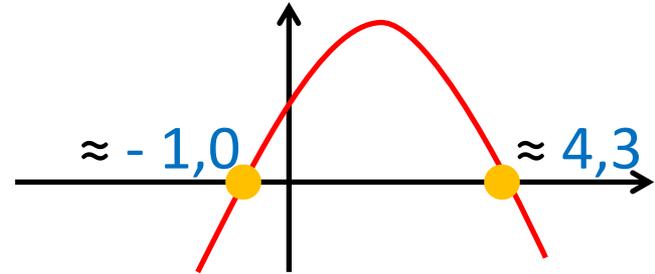
x	-5	-1	1
numérateur $g(x)$	-	0	+

et dénominateur $(5 - 3x)^2 > 0$

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 20x + 26}{(5 - 3x)^2} = \frac{g(x)}{(5 - 3x)^2} \quad \text{positif strict}$$

Signes du numérateur $g(x)$:

Utilisation de la calculatrice :



$$g(-1) = -6(-1)^2 + 20(-1) + 26 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1$$

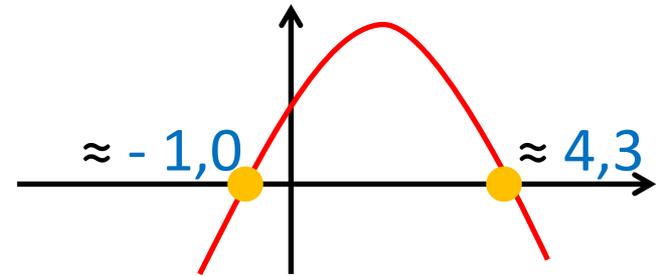
Conclusion :

	x	- 5	1
numérateur	$g(x)$		
dénominateur			
	$f'(x)$		
	$f(x)$		

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 20x + 26}{(5 - 3x)^2} = \frac{g(x)}{(5 - 3x)^2} \quad \text{positif strict}$$

Signes du numérateur $g(x)$:

Utilisation de la calculatrice :



$$g(-1) = -6(-1)^2 + 20(-1) + 26 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1$$

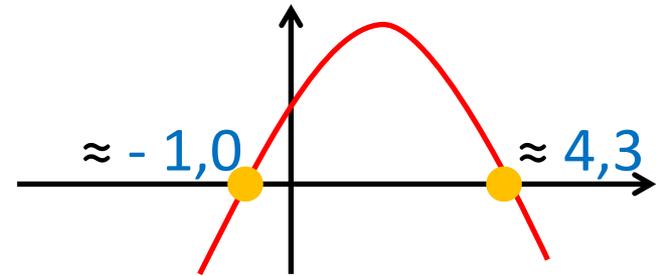
Conclusion :

	x	-5	-1	1
numérateur	$g(x)$	-	0	+
dénominateur		+		+
	$f'(x)$	-	0	+
	$f(x)$			

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 20x + 26}{(5 - 3x)^2} = \frac{g(x)}{(5 - 3x)^2} \quad \text{positif strict}$$

Signes du numérateur $g(x)$:

Utilisation de la calculatrice :

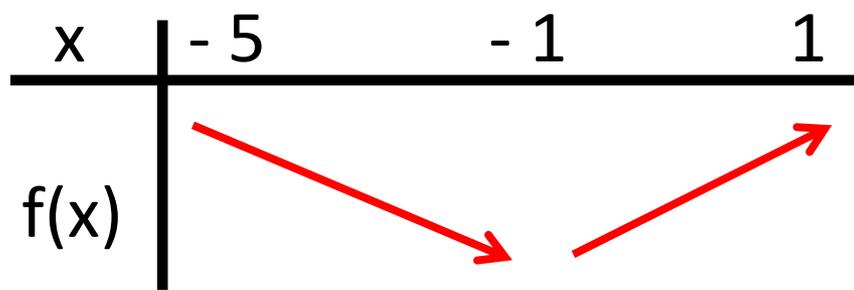


$$g(-1) = -6(-1)^2 + 20(-1) + 26 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1$$

Conclusion :

	x	-5	-1	1
numérateur	$g(x)$	-	0	+
dénominateur		+		+
théorème de la	$f'(x)$	-	0	+
monotonie	$f(x)$	↘		↗

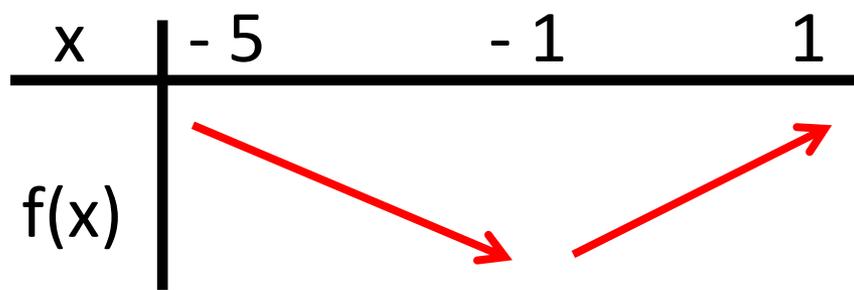
Réponse :



Vérification facultative

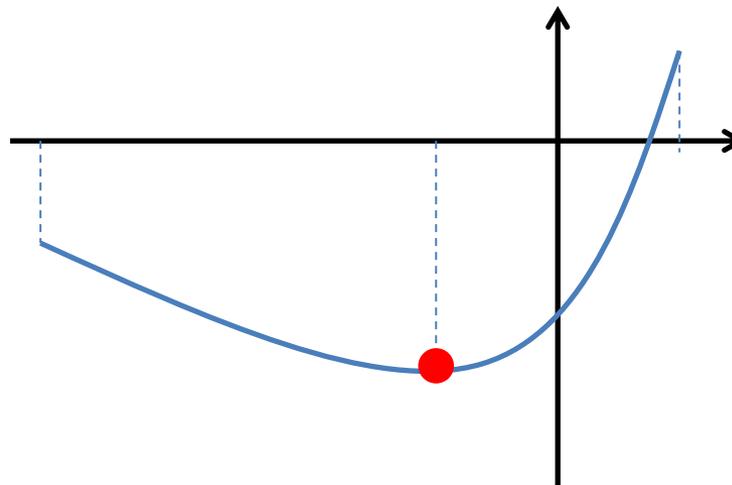
avec la calculatrice graphique :

Réponse :



Vérification facultative

avec la calculatrice graphique :



2°) Signes.

$$2x^2 + 13x - 13$$

$$f(x) = \frac{\quad}{5 - 3x}$$

Etude du dénominateur :

$$5 - 3x > 0 \iff -3x > -5 \iff x < 5/3$$

s'annule en $5/3$, positif avant,
négatif après.

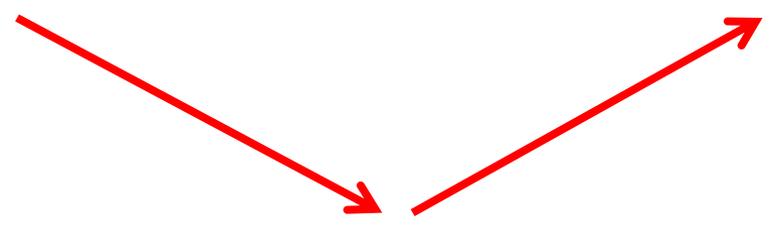
2°) Signes.

$$f(x) = \frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x}$$

Etude du numérateur :

C'est un polynôme degré 2 donc on ne peut pas résoudre algébriquement $f(x) = 0$ $f(x) < 0$ $f(x) > 0$

On utilise le tableau de variations.

x	- 5	- 1	1
f(x)			

$$f(x) = \frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x}$$

2°) Signes.

On utilise le tableau de variations.

x	-5	-1	1
f(x)			

$$f(-5) = \frac{2(-5)^2 + 13(-5) - 13}{5 - 3(-5)} = \frac{-28}{20} = -1,4$$

Même méthode $f(-1) = -3$ $f(1) = 1$

$$f(x) = \frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x} \quad 2^\circ) \text{ Signes.}$$

On utilise le tableau de variations.

x	- 5	- 1	1
f(x)	-1,4	-3	1

$$f(-5) = \frac{2(-5)^2 + 13(-5) - 13}{5 - 3(-5)} = \frac{-28}{20} = -1,4$$

Même méthode $f(-1) = -3$ $f(1) = 1$

$$f(x) = \frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x}$$

2°) Signes.

On utilise le tableau de variations.

x	-5	-1	1
f(x)	-1,4	-3	1

Diagram description: A variation table with x values -5, -1, 1 and f(x) values -1,4, -3, 1. A red minus sign is placed above the downward-sloping arrow between x = -5 and x = -1.

Sur $[-5 ; -1]$ $-1,4 \geq f(x) \geq -3 \Rightarrow f(x) < 0$

$$f(x) = \frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x}$$

2°) Signes.

On utilise le tableau de variations.

x	-5	-1	a	1
f(x)	-1,4	-3	0	1

Diagram description: A variation table for the function f(x). The x-axis has critical points at -5, -1, a, and 1. The corresponding f(x) values are -1,4, -3, 0, and 1. The function is decreasing from x = -5 to x = -1, reaching a minimum of -3. It then increases from x = -1 to x = 1, crossing the x-axis at x = a where f(x) = 0. The sign of the function is negative on (-5, -1) and (a, 1), and positive on (-1, a).

Sur $[-5; -1]$ $-1,4 \geq f(x) \geq -3 \Rightarrow f(x) < 0$

Sur $[-1; 1]$ il existe un unique a tel que $f(a) = 0$

Sur $[-1; a[$ $f(x) < 0$

Sur $]a; 1]$ $f(x) > 0$

$$f(x) = \frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x} \quad 2^\circ) \text{ Signes.}$$

On utilise le tableau de variations.

x	-5	-1	a	1
f(x)	-1,4	-3	0	1

Diagram description: A variation table for the function f(x). The x-axis has critical points at -5, -1, a, and 1. The function values at these points are -1,4, -3, 0, and 1 respectively. The function is decreasing from x = -5 to x = -1 (indicated by a red minus sign), and increasing from x = -1 to x = 1 (indicated by a red plus sign). The root of the function is at x = a, where f(x) = 0.

On ne peut pas résoudre algébriquement $f(x) = 0$

Calculatrice : $a \approx \dots ?$

$$f(x) = \frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x} \quad 2^\circ) \text{ Signes.}$$

On utilise le tableau de variations.

x	-5	-1	a	1
f(x)	-1,4	-3	0	1

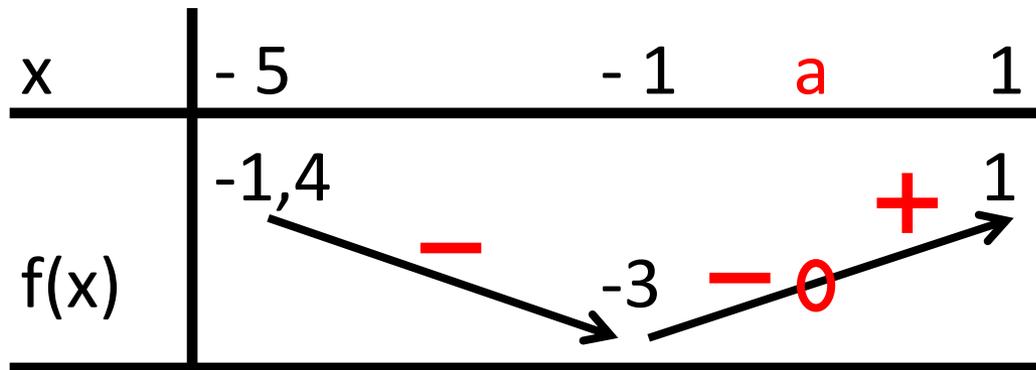
Diagram illustrating the sign changes of the function $f(x)$ between the critical points $x = -5$, $x = -1$, $x = a$, and $x = 1$. The function values at these points are $-1,4$, -3 , 0 , and 1 respectively. The sign of the function is negative ($-$) between $x = -5$ and $x = -1$, and positive ($+$) between $x = -1$ and $x = 1$. The function crosses the x-axis at $x = a$, where it is zero (0).

On ne peut pas résoudre algébriquement $f(x) = 0$

Calculatrice : $a \approx 0,8806$

$$f(x) = \frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x} \quad 2^\circ) \text{ Signes.}$$

On utilise le tableau de variations.



On ne peut pas résoudre algébriquement $f(x) = 0$

Calculatrice : $a \approx 0,8806$

Réponse :

x	-5	a	1
f(x)	-	0	+

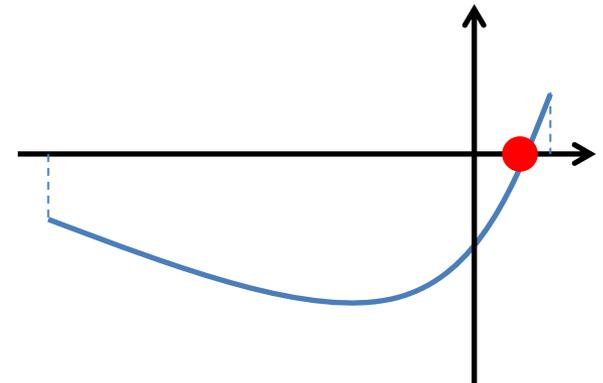
$$f(x) = \frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x}$$

2°) Signes.

On utilise le tableau de variations.

x	-5	-1	a	1
f(x)	-1,4	-3	0	1

Signes: -, -, +



On ne peut pas résoudre algébriquement $f(x) = 0$

Calculatrice : $a \approx 0,8806$

Réponse :

x	-5	a	1
f(x)	-	0	+

$$f(x) = \frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x}$$

3°) Extremums.

On utilise le tableau de variations.

x	-5	-1	1
f(x)	-1,4	-3	1

The table shows the variation of the function $f(x)$ over the interval $[-5, 1]$. The x-axis is marked at -5 , -1 , and 1 . The corresponding function values are $-1,4$, -3 , and 1 . Arrows indicate that the function is decreasing from $x = -5$ to $x = -1$, and increasing from $x = -1$ to $x = 1$.

$$f(x) = \frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x}$$

3°) Extremums.

On utilise le tableau de variations.

x	- 5	- 1	1
f(x)	-1,4	-3	1

$1 > -1,4 \Rightarrow$ Maximum 1 atteint en - 5

Minimum - 3 atteint en 1

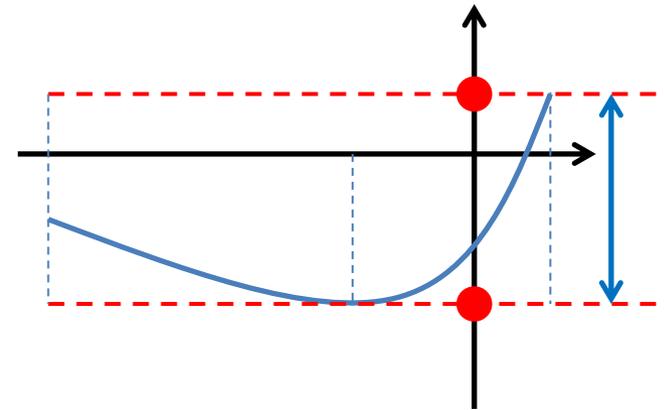
$$f(x) = \frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x}$$

3°) Extremums.

On utilise le tableau de variations.

x	- 5	- 1	1
f(x)	-1,4	-3	1

Arrows in the table indicate a decrease from x = -5 to x = -1, and an increase from x = -1 to x = 1.



$1 > -1,4 \Rightarrow$ **Maximum 1** atteint en - 5

Minimum - 3 atteint en 1