Exercice 3 : Soit la fonction f

définie sur [- 5 ; 1]

par $$f(x) = \frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x}$$

1°) Déterminez ses sens de variation.

2°) Déterminez ses signes.

3°) Déterminez ses extremums.

1°) Sens de variation :

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x} \right)' = \dots ?$$

1°) Sens de variation :

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x} \right)' = \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

1°) Sens de variation :

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x}\right)' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$u = 2x^2 + 13x - 13 \Rightarrow u' = \ldots ?$

$v = 5 - 3x \Rightarrow v' = \ldots ?$

1°) Sens de variation :

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x} \right)' = \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$u = 2x^2 + 13x - 13 \Rightarrow u' = 2(x^2)' + (13x - 13)'$

$= 2(2x) + (13) = 4x + 13$

$v = 5 - 3x = -3x + 5 \Rightarrow v' = -3$

1°) Sens de variation :

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x}\right)' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - v'\,u}{v^2}$$

$u' = 2(\,x^2\,)' + (\,13x - 13\,)' = 2(2x) + 13 = 4x + 13$

$v = 5 - 3x = -\,3x + 5 \Rightarrow v' = -\,3$

$f'(x) = \ldots\ ?$

1°) Sens de variation :

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x} \right)' = \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$u' = 2(x^2)' + (13x - 13)' = 2(2x) + 13 = 4x + 13$

$v = 5 - 3x = -3x + 5 \Rightarrow v' = -3$

$$f'(x) = \frac{(4x + 13)(5 - 3x) - (-3)(2x^2 + 13x - 13)}{(5 - 3x)^2}$$

1°) Sens de variation :

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x} \right)' = \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'\,v - v'\,u}{v^2}$$

$$= \frac{(\,4x + 13\,)(\,5 - 3x\,) - (-\,3)(\,2x^2 + 13x - 13\,)}{(\,5 - 3x\,)^2}$$

$$= \frac{\ldots\,?}{(\,5 - 3x\,)^2}$$

1°) Sens de variation :

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x} \right)' = \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' v - v' u}{v^2}$$

$$= \frac{(4x + 13)(5 - 3x) - (- 3)(2x^2 + 13x - 13)}{(5 - 3x)^2}$$

$$= \frac{20x + 65 - 12x^2 - 39x + 6x^2 + 39x - 39}{(5 - 3x)^2}$$

1°) Sens de variation :

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x} \right)' = \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$= \frac{(4x + 13)(5 - 3x) - (-3)(2x^2 + 13x - 13)}{(5 - 3x)^2}$$

$$= \frac{-6x^2 + 20x + 26}{(5 - 3x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 20x + 26}{(5 - 3x)^2} = \frac{g(x)}{(5 - 3x)^2}$$

Signes du dénominateur :

... ?

Signes du numérateur $g(x)$:

... ?

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 20x + 26}{(5 - 3x)^2} = \frac{g(x)}{(5 - 3x)^2}$$

Le dénominateur est toujours positif car est un carré.

Il ne s'annule qu'en 5/3 qui n'appartient pas à [- 5 ; 1].

Signes du numérateur g(x) :

… ?

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 20x + 26}{(5 - 3x)^2} = \frac{g(x)}{(5 - 3x)^2}$$

Le dénominateur est toujours positif car est un carré.

Il ne s'annule qu'en 5/3 qui n'appartient pas à $[-5 ; 1]$.

Signes du numérateur $g(x)$:

C'est un polynôme degré 2 $ax^2 + bx + c$

donc on ne peut pas résoudre algébriquement

$g(x) = 0$ $g(x) < 0$ $g(x) > 0$

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 20x + 26}{(5 - 3x)^2} = \frac{g(x)}{(5 - 3x)^2}$$

Le dénominateur est toujours positif car est un carré.

Il ne s'annule qu'en 5/3 qui n'appartient pas à $[-5 ; 1]$.

Signes du numérateur $g(x)$:

C'est un polynôme degré 2 $ax^2 + bx + c$

donc on ne peut pas résoudre algébriquement

$g(x) = 0$ $g(x) < 0$ $g(x) > 0$

polynôme degré 2 $\Rightarrow$ sa courbe est une parabole

$a = -6 < 0$ $\Rightarrow$ la parabole est orientée vers la bas

On utilise la symétrie d'axe vertical. Connaît-on 2 antécédents ayant la même image ?

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 20x + 26}{(5 - 3x)^2} = \frac{g(x)}{(5 - 3x)^2}$$

Signes du numérateur g(x) :

C'est un polynôme degré 2 $ax^2 + bx + c$

donc on ne peut pas résoudre algébriquement

$g(x) = 0$ $g(x) < 0$ $g(x) > 0$

polynôme degré 2 ⇒ sa courbe est une parabole

$a = -6 < 0$ ⇒ la parabole est orientée vers la bas

On utilise la symétrie d'axe vertical. Connaît-on 2 antécédents ayant la même image ?

Utilisation de la calculatrice :

Utilisation de la calculatrice graphique.

D_f = [- 5 ; 1]

$g(x) = -6x^2 + 20x + 26$

Menu → Graph

On tape l'expression de g(x) dans Y1=

Shift Windows → Xmini = -3 EXE Xmaxi = 1 EXE EXIT

Draw,

puis Shift Zoom Auto ou Shift Windows → Ymini et Ymaxi pour ajuster (si nécessaire) la taille verticale de l'écran.

Shift Zoom Box pour obtenir des Zoom (si les pixels sont horizontaux).

Shift Trace pour lire des coordonnées.

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 20x + 26}{(5 - 3x)^2} = \frac{g(x)}{(5 - 3x)^2}$$

Signes du numérateur g(x) :

C'est un polynôme degré 2 $ax^2 + bx + c$

donc on ne peut pas résoudre algébriquement

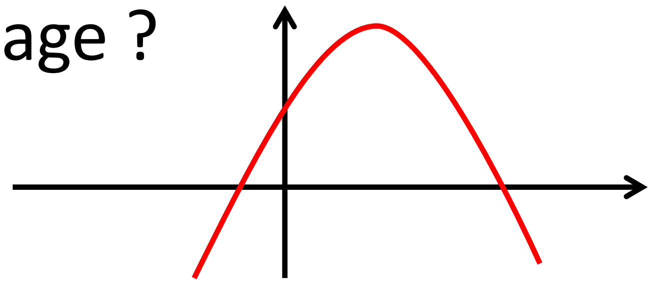
$g(x) = 0 \quad g(x) < 0 \quad g(x) > 0$

polynôme degré 2 ⇨ sa courbe est une parabole

$a = -6 < 0$ ⇨ la parabole est orientée vers la bas

On utilise la symétrie d'axe vertical. Connaît-on 2 antécédents ayant la même image ?

Utilisation de la calculatrice :



$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 20x + 26}{(5-3x)^2} = \frac{g(x)}{(5-3x)^2}$$

Signes du numérateur g(x) :

C'est un polynôme degré 2 $ax^2 + bx + c$

donc on ne peut pas résoudre algébriquement

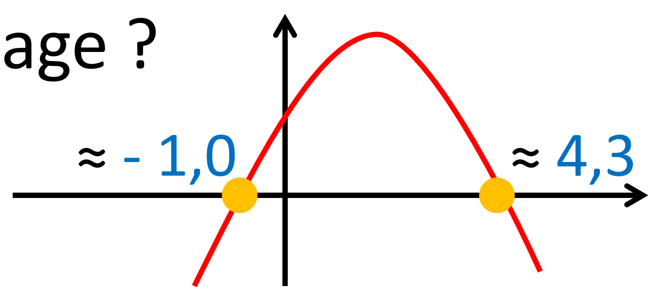
$g(x) = 0$ $g(x) < 0$ $g(x) > 0$

polynôme degré 2 $\Rightarrow$ sa courbe est une parabole

$a = -6 < 0$ $\Rightarrow$ la parabole est orientée vers la bas

On utilise la symétrie d'axe vertical. Connaît-on 2 antécédents ayant la même image ?

Utilisation de la calculatrice :

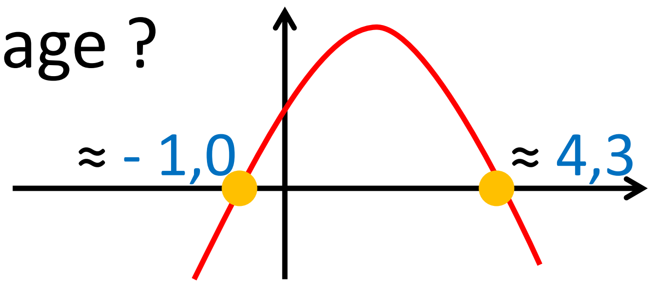


$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 20x + 26}{(5-3x)^2} = \frac{g(x)}{(5-3x)^2}$$

Signes du numérateur $g(x)$:

On utilise la symétrie d'axe vertical. Connaît-on 2 antécédents ayant la même image ?

Utilisation de la calculatrice :



Lorsque l'on augmente la précision on obtient

$x_1 \approx -1{,}0000$ et $x_2 \approx 4{,}3333$

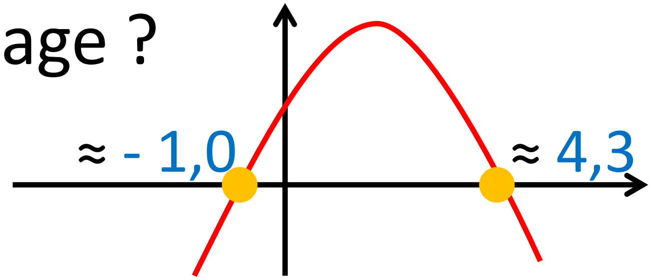
N'aurait-on pas … ?

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 20x + 26}{(5 - 3x)^2} = \frac{g(x)}{(5 - 3x)^2}$$

Signes du numérateur $g(x)$:

On utilise la symétrie d'axe vertical. Connaît-on 2 antécédents ayant la même image ?

Utilisation de la calculatrice :



Lorsque l'on augmente la précision on obtient

$x_1 \approx -1{,}0000$ et $x_2 \approx 4{,}3333$

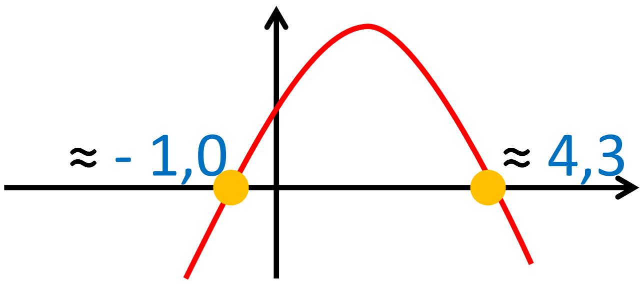
N'aurait-on pas $x_1 = -1$ et $x_2 = 4 + 1/3 = 13/3$?

On peut répondre à cette question en faisant …

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 20x + 26}{(5 - 3x)^2} = \frac{g(x)}{(5 - 3x)^2}$$

Signes du numérateur g(x) :

Utilisation de la calculatrice :



Lorsque l'on augmente la précision on obtient

$x_1 \approx -1{,}0000$ et $x_2 \approx 4{,}3333$

N'aurait-on pas $x_1 = -1$ et $x_2 = 4 + 1/3 = 13/3$?

$g(-1) = -6(-1)^2 + 20(-1) + 26 = -6(1) - 20 + 26 = 0$

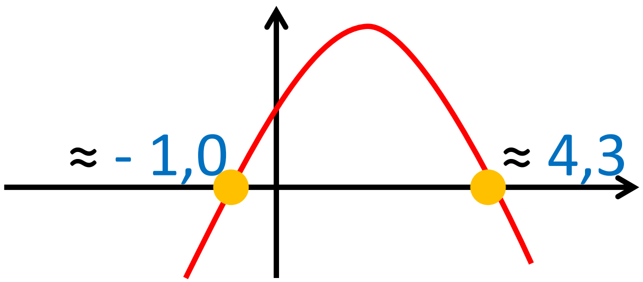
$\Rightarrow x_1 = -1$

g(13/3) n'existe pas car 13/3 n'est pas dans [- 5 ; 1].

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 20x + 26}{(5 - 3x)^2} = \frac{g(x)}{(5 - 3x)^2}$$

Signes du numérateur $g(x)$:

Utilisation de la calculatrice :



N'aurait-on pas $x_1 = -1$ et $x_2 = 4 + 1/3 = 13/3$?

$g(-1) = -6(-1)^2 + 20(-1) + 26 = -6(1) - 20 + 26 = 0$

$\Rightarrow x_1 = -1$

Conclusion :

x	- 5		- 1		1
numérateur g(x)		–	0	+	

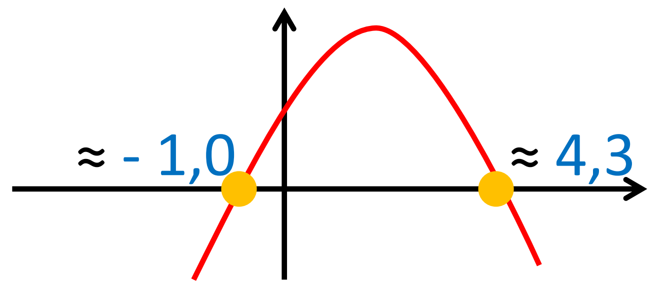
et dénominateur $(5 - 3x)^2 > 0$

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 20x + 26}{(5-3x)^2} = \frac{g(x)}{(5-3x)^2}$$

positif strict

Signes du numérateur g(x) :

Utilisation de la calculatrice :



$g(-1) = -6(-1)^2 + 20(-1) + 26 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$

Conclusion :

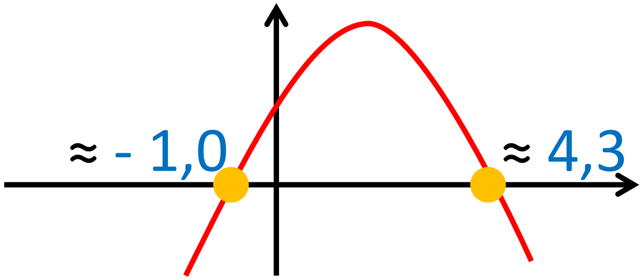
x	- 5	1
numérateur g(x)		
dénominateur		
f '(x)		
f(x)		

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 20x + 26}{(5-3x)^2} = \frac{g(x)}{(5-3x)^2}$$

positif strict

Signes du numérateur g(x) :

Utilisation de la calculatrice :



$g(-1) = -6(-1)^2 + 20(-1) + 26 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$

Conclusion :

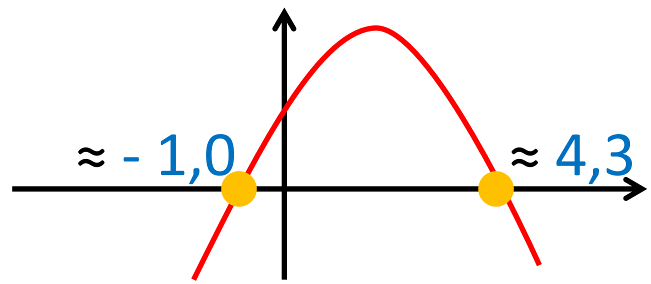
x	- 5		- 1		1
numérateur g(x)		–	0	+	
dénominateur		+		+	
f '(x)		–	0	+	
f(x)					

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 20x + 26}{(5 - 3x)^2} = \frac{g(x)}{(5 - 3x)^2}$$

positif strict

Signes du numérateur g(x) :

Utilisation de la calculatrice :



$g(-1) = -6(-1)^2 + 20(-1) + 26 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$

Conclusion :

x	- 5		- 1		1
numérateur g(x)		–	0	+	
dénominateur		+		+	
f '(x)		–	0	+	
f(x)		↘		↗	

théorème de la monotonie

Réponse :

x	- 5		- 1		1
f(x)		↘		↗	

Vérification facultative

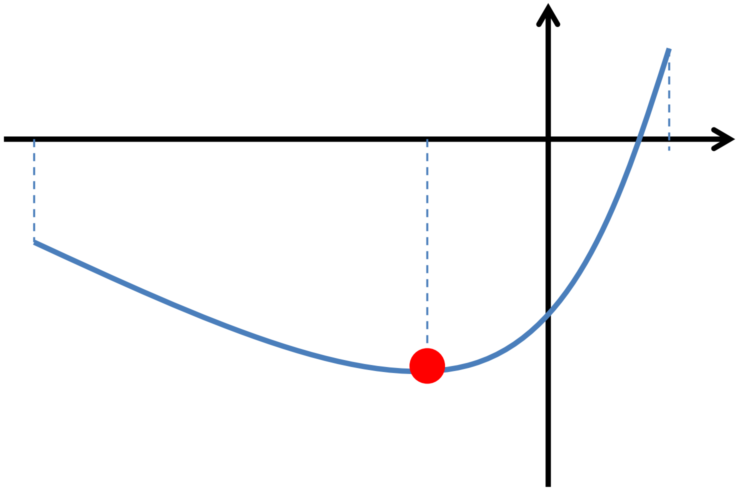
avec la calculatrice graphique :

Réponse :

x	-5		-1		1
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Vérification facultative

avec la calculatrice graphique :



2°) Signes.

$$f(x) = \frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x}$$

Etude du dénominateur :

$5 - 3x > 0 \Leftrightarrow - 3x > - 5 \Leftrightarrow x < 5/3$

s'annule en 5/3, positif avant, négatif après.

2°) Signes.

$$f(x) = \frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x}$$

Etude du numérateur :

C'est un polynôme degré 2 donc on ne peut pas résoudre algébriquement $f(x) = 0$ $f(x) < 0$ $f(x) > 0$

On utilise le tableau de variations.

x	- 5		- 1		1
f(x)		↘		↗	

$$f(x) = \frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x}$$

2°) Signes.

On utilise le tableau de variations.

x	- 5		- 1		1
f(x)		↘		↗	

$$f(-5) = \frac{2(-5)^2 + 13(-5) - 13}{5 - 3(-5)} = \frac{-28}{20} = -1{,}4$$

Même méthode $\quad f(-1) = -3 \quad\quad f(1) = 1$

$$f(x) = \frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x}$$

2°) Signes.

On utilise le tableau de variations.

x	-5		-1		1
$f(x)$	$-1{,}4$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1

$$f(-5) = \frac{2(-5)^2 + 13(-5) - 13}{5 - 3(-5)} = \frac{-28}{20} = -1{,}4$$

Même méthode $\quad f(-1) = -3 \quad\quad f(1) = 1$

$$f(x) = \frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x}$$

2°) Signes.

On utilise le tableau de variations.

x	-5		-1		1
$f(x)$	$-1{,}4$	$\searrow$ $-$	-3	$\nearrow$	1

Sur $[-5 ; -1]$ $\quad -1{,}4 \geq f(x) \geq -3 \Rightarrow f(x) < 0$

$$f(x) = \frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x}$$

2°) Signes.

On utilise le tableau de variations.

x	- 5		- 1		a		1
f(x)	-1,4	$\searrow$ −	-3	$\nearrow$ −	0	$\nearrow$ +	1

Sur [- 5 ; - 1] - 1,4 ≥ f(x) ≥ - 3 ⇒ f(x) < 0

Sur [- 1 ; 1] il existe un unique a tel que f(a) = 0

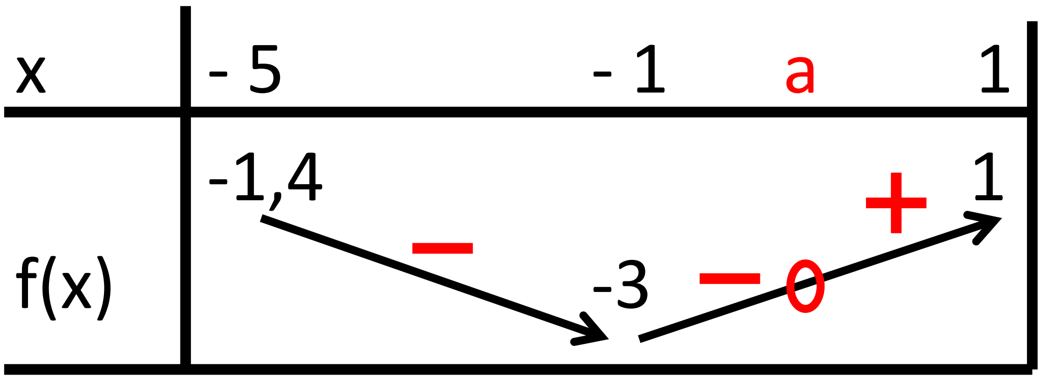
Sur [- 1 ; a [f(a) < 0

Sur] a ; 1] f(a) > 0

$$f(x) = \frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x}$$

2°) Signes.

On utilise le tableau de variations.



On ne peut pas résoudre algébriquement $f(x) = 0$

Calculatrice : $a \approx$ … ?

$$f(x) = \frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x}$$

2°) Signes.

On utilise le tableau de variations.

x	-5		-1		a		1
f(x)	$-1{,}4$	$\searrow$ $-$	-3	$\nearrow$ $-$	0	$\nearrow$ $+$	1

On ne peut pas résoudre algébriquement $f(x) = 0$

Calculatrice : $a \approx 0{,}8806$

$$f(x) = \frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x}$$

2°) Signes.

On utilise le tableau de variations.

x	-5		-1		a		1
$f(x)$	$-1{,}4$	$\searrow$ $-$	-3	$\nearrow$ $-$	0	$\nearrow$ $+$	1

On ne peut pas résoudre algébriquement $f(x) = 0$

Calculatrice : $a \approx 0{,}8806$

Réponse :

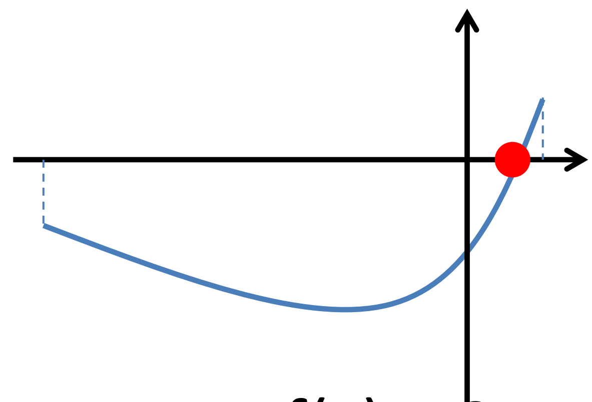
x	-5		a		1
$f(x)$		$-$	0	$+$	

$$f(x) = \frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x}$$

2°) Signes.

On utilise le tableau de variations.

x	- 5		- 1		a		1
f(x)	-1,4	–	-3	–	0	+	1



On ne peut pas résoudre algébriquement $f(x) = 0$

Calculatrice : $a \approx 0{,}8806$

Réponse :

x	- 5		a		1
f(x)		–	0	+	

$$f(x) = \frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x}$$

3°) Extremums.

On utilise le tableau de variations.

x	- 5		- 1		1
f(x)	-1,4	↘	-3	↗	1

$$f(x) = \frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x}$$

3°) Extremums.

On utilise le tableau de variations.

x	- 5	- 1	1
f(x)	-1,4	-3	1

1 > - 1,4 ⇨ Maximum 1 atteint en - 5

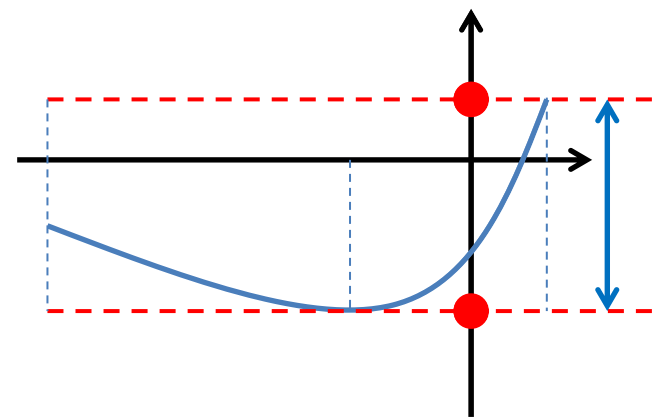
Minimum - 3 atteint en 1

$$f(x) = \frac{2x^2 + 13x - 13}{5 - 3x}$$

3°) Extremums.

On utilise le tableau de variations.

x	-5		-1		1
$f(x)$	$-1{,}4$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1



$1 > -1{,}4$ $\Rightarrow$ Maximum 1 atteint en - 5

Minimum - 3 atteint en 1