Exercice 3 :

(u_n) est la suite

définie sur IN par les termes 1 ; 0 ; 1 ; 0 etc…

1°) Tracez sa courbe pour des abscisses ≤ 3

2°) Quel semble être son sens de variation ?

3°) Quelle semble être sa limite ?

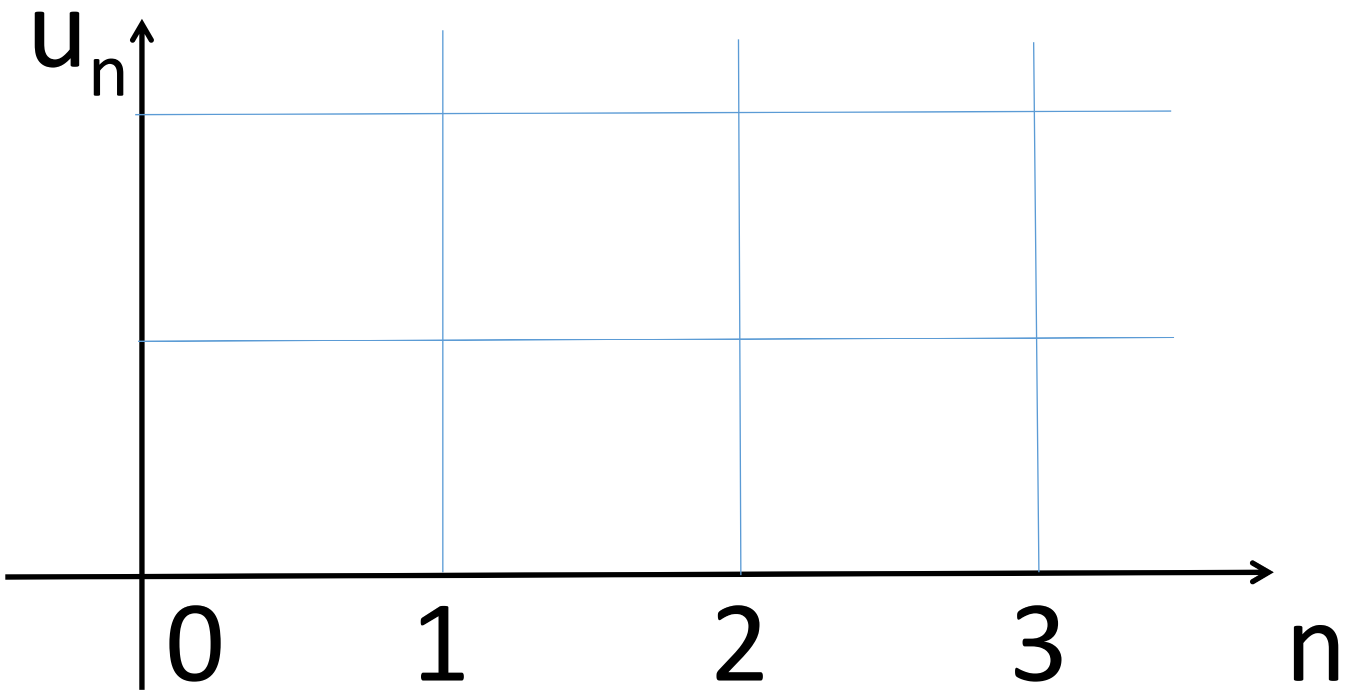
4°) Définissez la suite par une relation explicite.

5°) Définissez la suite par une relation de récurrence.

6°) Déterminez le 100$^{\text{ème}}$ terme.

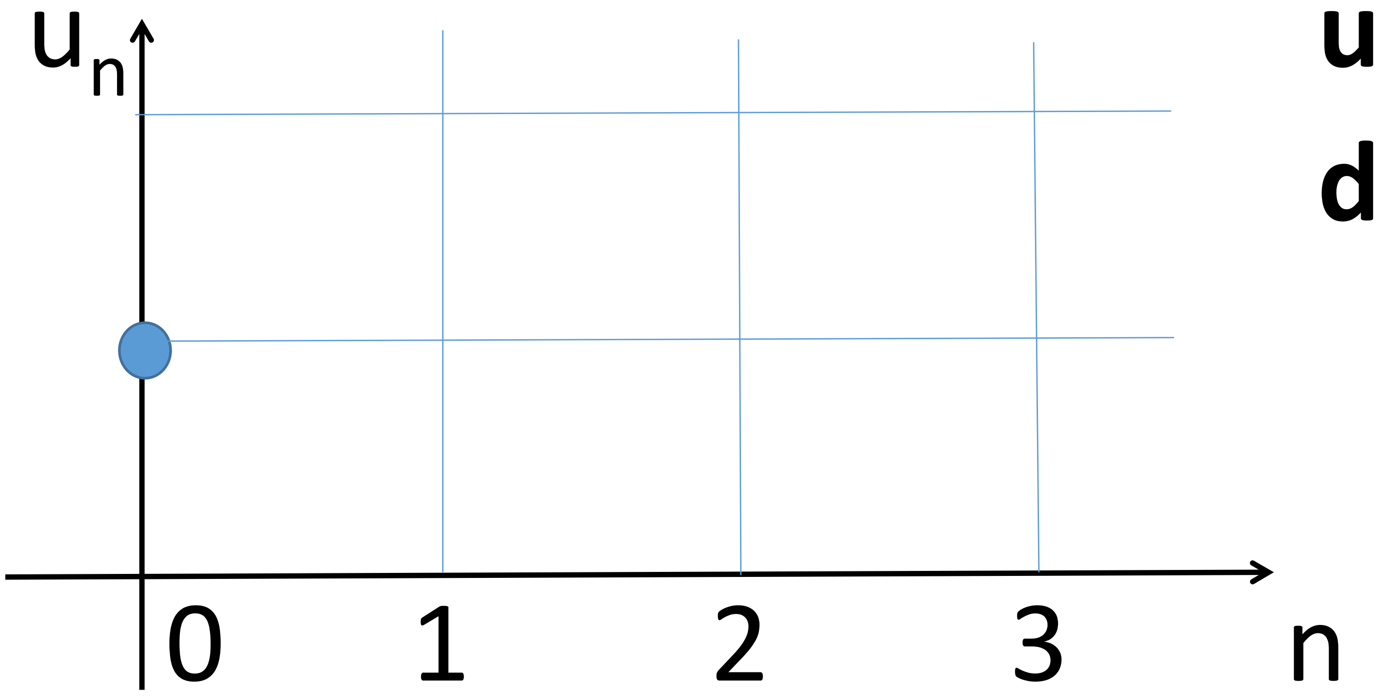
$u_0 = 1 \qquad u_1 = 0 \qquad u_2 = 1 \qquad u_3 = 0$

1°) Tracez sa courbe pour des abscisses ≤ 3



$u_0 = 1 \qquad u_1 = 0 \qquad u_2 = 1 \qquad u_3 = 0$

1°) Tracez sa courbe pour des abscisses ≤ 3



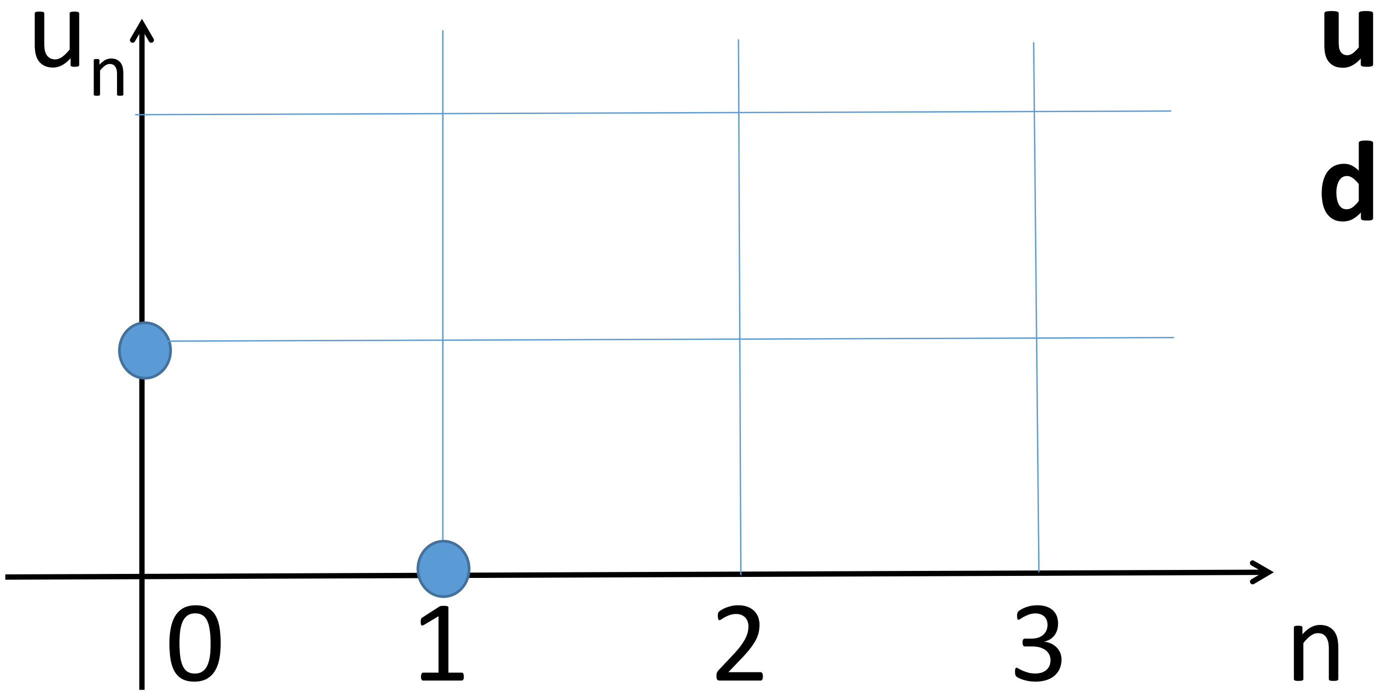
u_0 = 1

donne le point

(0 ; 1)

$u_0 = 1 \qquad u_1 = 0 \qquad u_2 = 1 \qquad u_3 = 0$

1°) Tracez sa courbe pour des abscisses ≤ 3



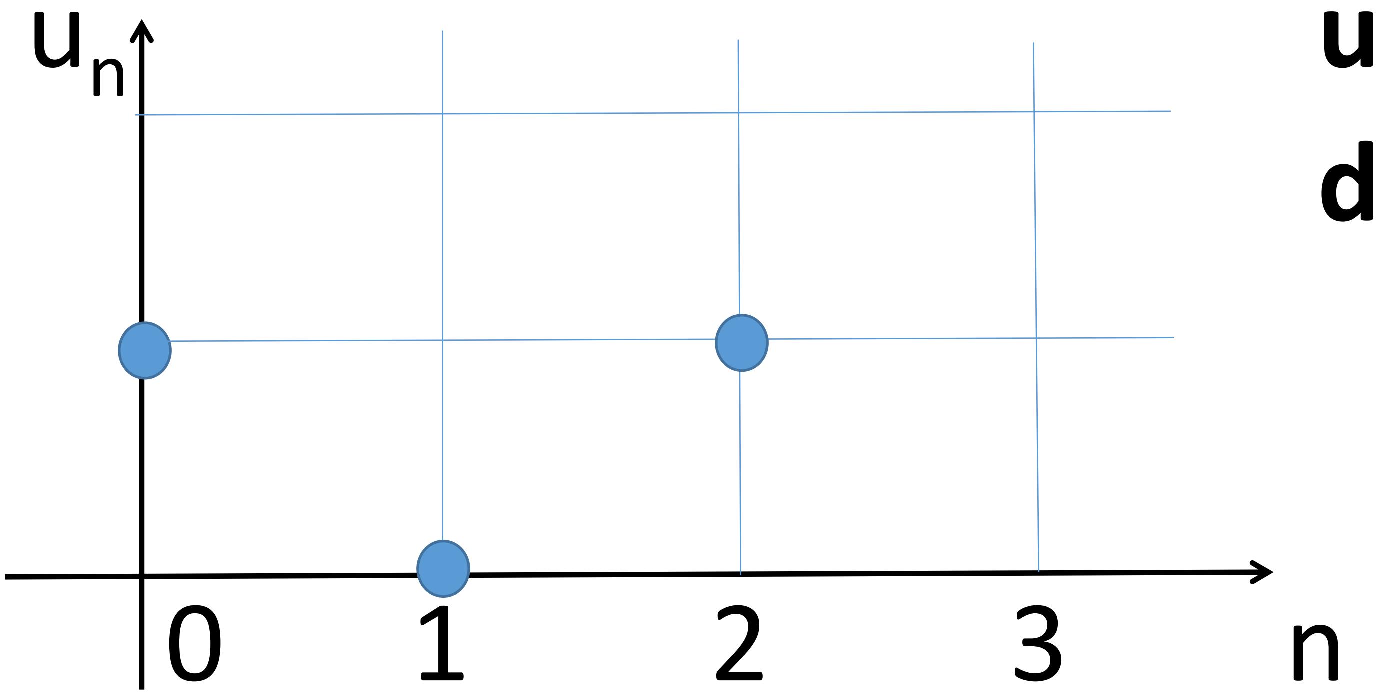
$u_1 = 0$

donne le point

(1 ; 0)

$u_0 = 1$ $u_1 = 0$ $u_2 = 1$ $u_3 = 0$

1°) Tracez sa courbe pour des abscisses ≤ 3



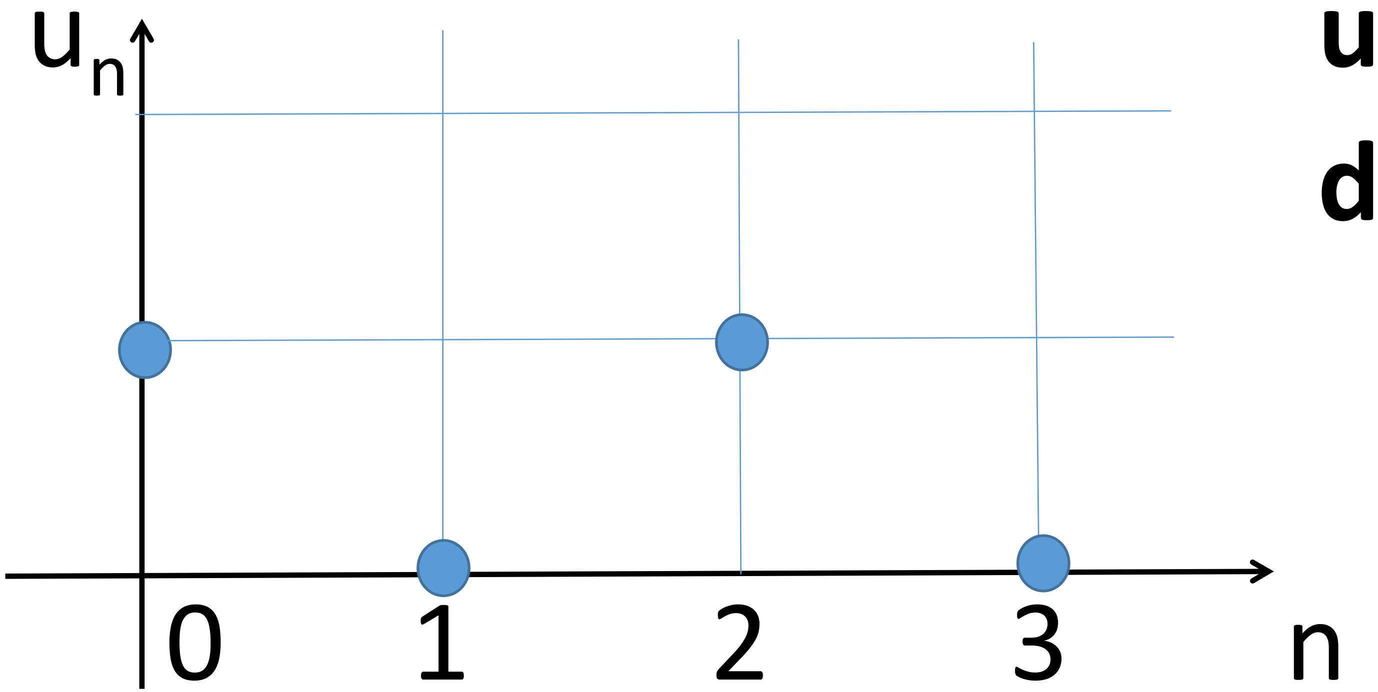
u_2 = 1

donne le point

(2 ; 1)

$u_0 = 1$ $u_1 = 0$ $u_2 = 1$ $u_3 = 0$

1°) Tracez sa courbe pour des abscisses ≤ 3



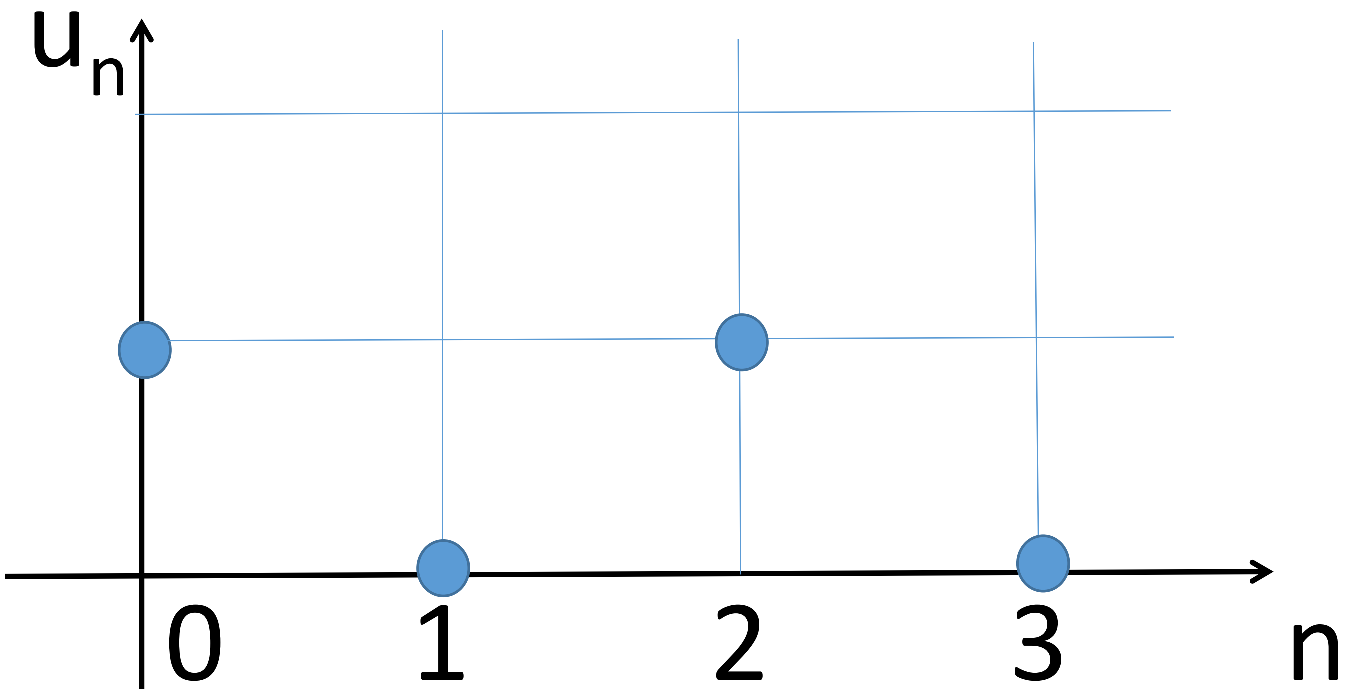
$u_3 = 0$

donne le point

(3 ; 0)

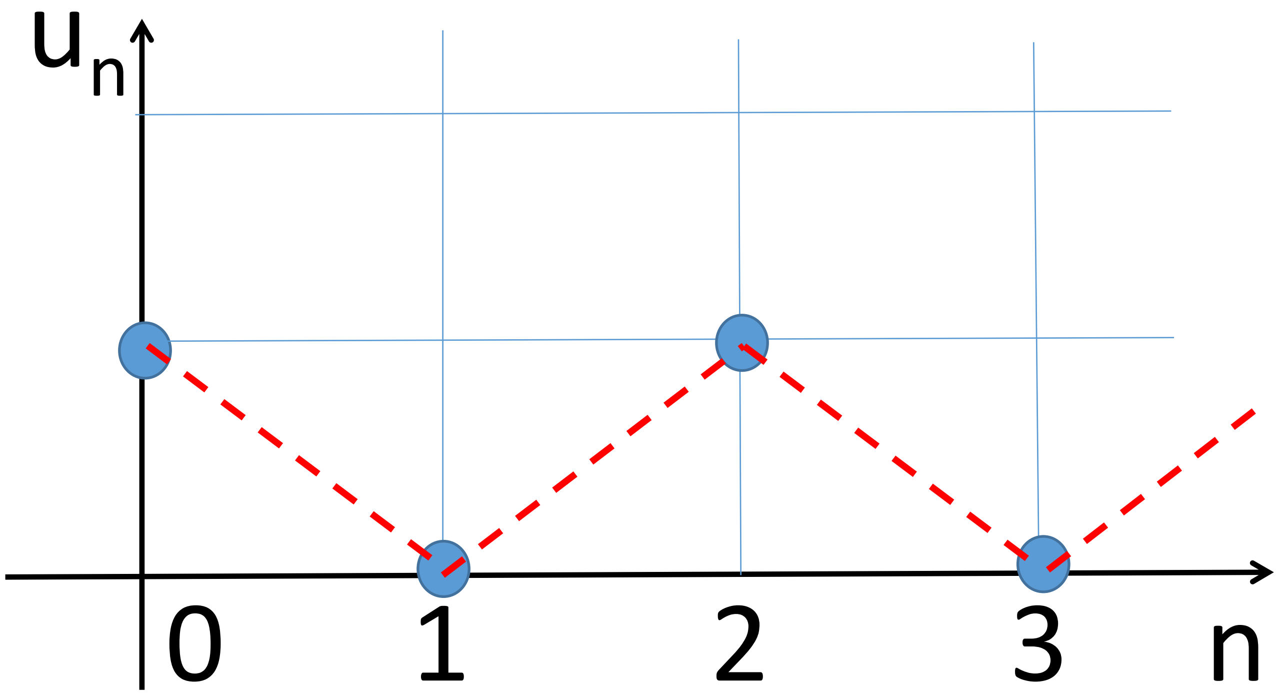
$u_0 = 1$ $u_1 = 0$ $u_2 = 1$ $u_3 = 0$

2°) Quel semble être son sens de variation ?



$u_0 = 1 \qquad u_1 = 0 \qquad u_2 = 1 \qquad u_3 = 0$

2°) Quel semble être son sens de variation ?

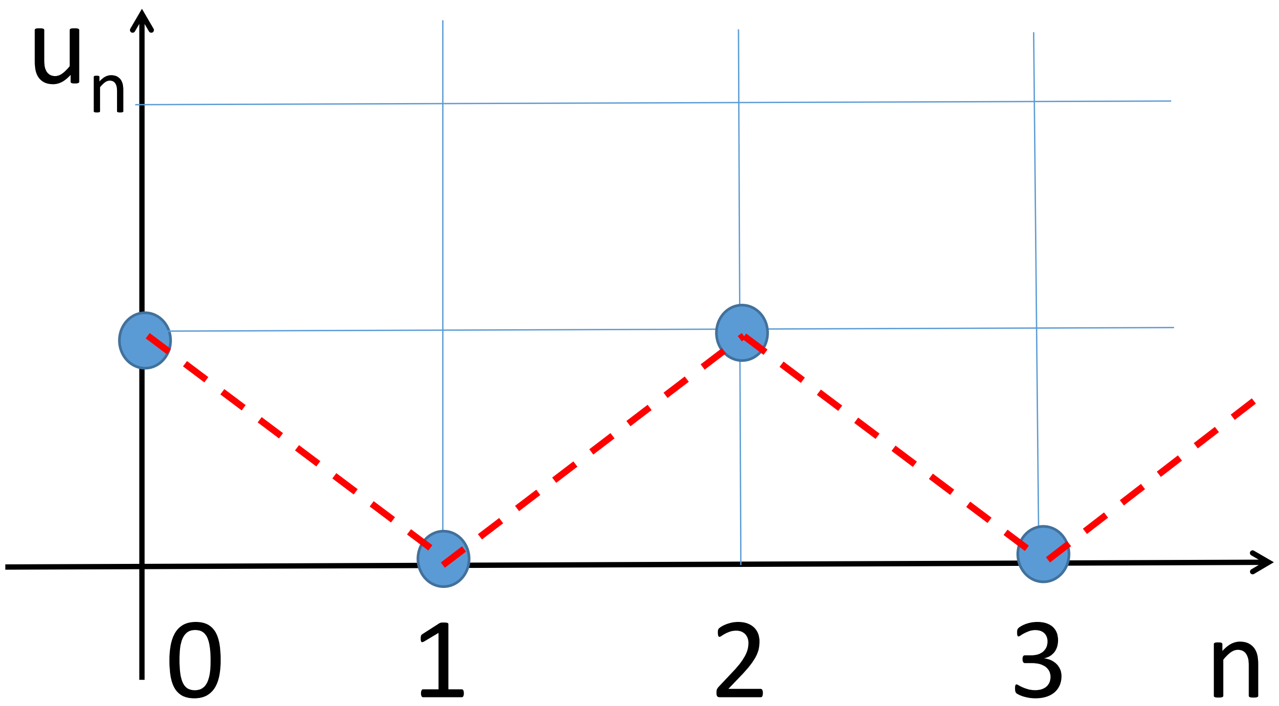


La suite (u_n) semble être alternativement croissante et décroissante.

$u_0 = 1$ $u_1 = 0$ $u_2 = 1$ $u_3 = 0$

3°) Quelle semble être sa limite ?

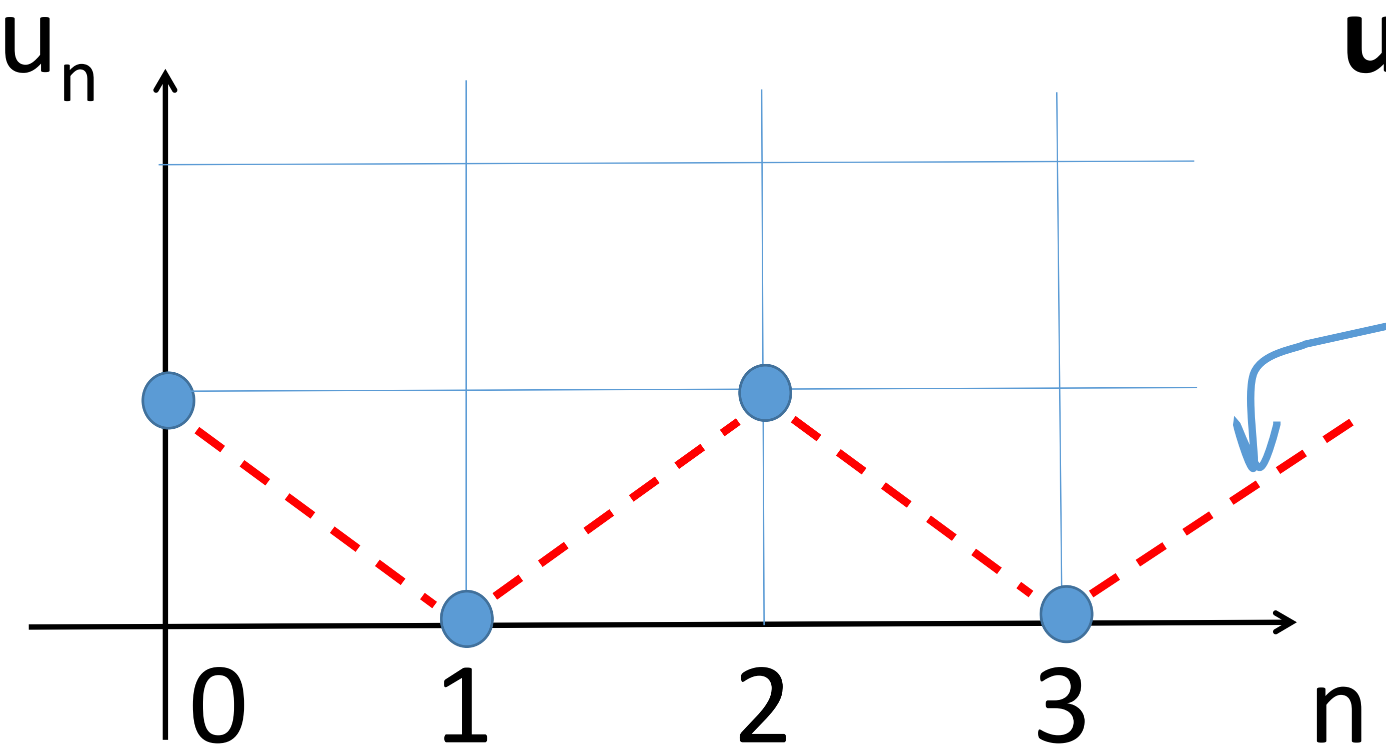
Pas de limite ! u_n ne se stabilise pas.



La suite (u_n) semble être alternativement croissante et décroissante.

$u_0 = 1 \qquad u_1 = 0 \qquad u_2 = 1 \qquad u_3 = 0$

4°) Déterminez la relation explicite.



u_n = f(n) = … ?

équation de

la courbe ?

4°) Définissez la suite par une relation explicite.

On remarque que $u_{2n} = 1$

et $u_{2n+1} = 0$

donc que la suite (u_n) est …

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	1	0	1	0	1	0	1

4°) Définissez la suite par une relation explicite.

On remarque que $u_{2n} = 1$

et $u_{2n+1} = 0$

donc que la suite (u_n) est périodique de période 2. Il suffit de trouver une fonction f périodique de période 2.

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	1	0	1	0	1	0	1

4°) Définissez la suite par une relation explicite.

$u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = 0$

donc que la suite (u_n) est périodique de période 2.

Il suffit de trouver une fonction f périodique de période 2 (voir chapitre « Fonctions associées »).

Par exemples : $u_n = f(n) = | \cos (n\pi/2) |$

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	1	0	1	0	1	0	1

4°) Définissez la suite par une relation explicite.

Par exemples : $u_n = f(n) = |\cos(n\pi/2)|$

$u_n = 1 - |\sin(n\pi/2)|$

$u_n = 0{,}5\,(1 - (-1)^{n+1})$

$u_n = \ldots$

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	1	0	1	0	1	0	1

4°) Définissez la suite par une relation explicite.

Par exemples : $u_n = f(n) = |\cos(n\pi/2)|$

$u_n = 1 - |\sin(n\pi/2)|$

$$u_n = 0,5\,(1 - (-1)^{n+1})$$

$$u_n = 0,5\,(1 + (-1)^{n})$$

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	1	0	1	0	1	0	1

5°) Définissez la suite par une relation de récurrence.

$u_{n+1} = g(u_n) = \dots ?$

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	1	0	1	0	1	0	1

5°) Définissez la suite par une relation de récurrence.

$$u_{n+1} = g(u_n) = \ldots ?$$

$$u_{n+1} = u_n - 1 \qquad \text{si} \ldots ?$$

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	1	0	1	0	1	0	1

5°) Définissez la suite par une relation de récurrence.

$u_{n+1} = g(u_n) = \ldots ?$

$u_{n+1} = u_n - 1$ si n est pair

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	1	0	1	0	1	0	1

5°) Définissez la suite par une relation de récurrence.

$u_{n+1} = g(u_n) = \dots\ ?$

$u_{n+1} = u_n - 1$ si n est pair

$u_{n+1} = u_n + 1$ si n est impair

$\Rightarrow$ $u_{n+1} = u_n + \dots\ ?$

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	1	0	1	0	1	0	1

5°) Définissez la suite par une relation de récurrence.

$$u_{n+1} = g(u_n) = \dots\ ?$$

$u_{n+1} = u_n - 1$ si n est pair

$u_{n+1} = u_n + 1$ si n est impair

$$\Rightarrow \quad u_{n+1} = u_n + (-1)^{n+1}$$

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	1	0	1	0	1	0	1

5°) Définissez la suite par une relation de récurrence.

$u_{n+1} = g(u_n) = \dots ?$

$u_{n+1} = u_n - 1$ si n est pair

$u_{n+1} = u_n + 1$ si n est impair

$\Rightarrow u_{n+1} = u_n + (-1)^{n+1} = u_n - (-1)^n$

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	1	0	1	0	1	0	1

$u_n = 0{,}5\,(\,1 + (-\,1)^n\,) \;=\; u_n + (-\,1)^{n+1}$

6°) Déterminez le 100ème terme.

Utilisation de la relation explicite :

$\mathbf{u_0 = 1}$ est le 1er terme (et non $\mathbf{u_1}$)

donc $\mathbf{u_{99}}$ est le 100ème terme.

$\mathbf{u_n = 0{,}5\,(\,1 + (-\,1)^n\,)}$

$\Rightarrow$ $\mathbf{u_{99} = 0{,}5\,(\,1 + (-\,1)^{99}\,)} = 0{,}5\,(\,1 + (-\,1)\,) = \mathbf{0}$

Utiliser la relation de récurrence oblige à déterminer tous les termes de $\mathbf{u_1}$ à $\mathbf{u_{99}}$!