Algorithme de Dichotomie

du grec « dicho » (en deux)

et « tomie » (couper, comme dans vasectomie, appendicectomie, atome, anatomie…).

On cherche la solution approchée

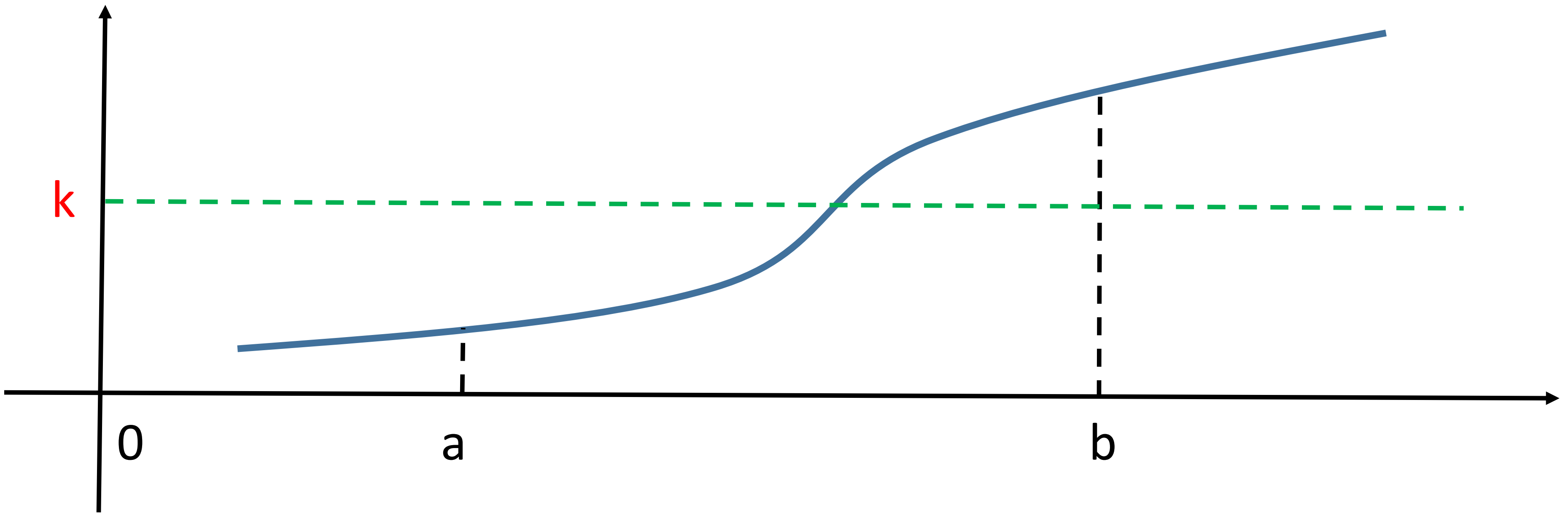
d’une équation du type $f(x) = k$

dans un intervalle [a ; b] où f est monotone.

Algorithme de Dichotomie

du grec « dicho » (en deux) et « tomie » (couper, comme dans vasectomie, appendicectomie, atome, anatomie…).

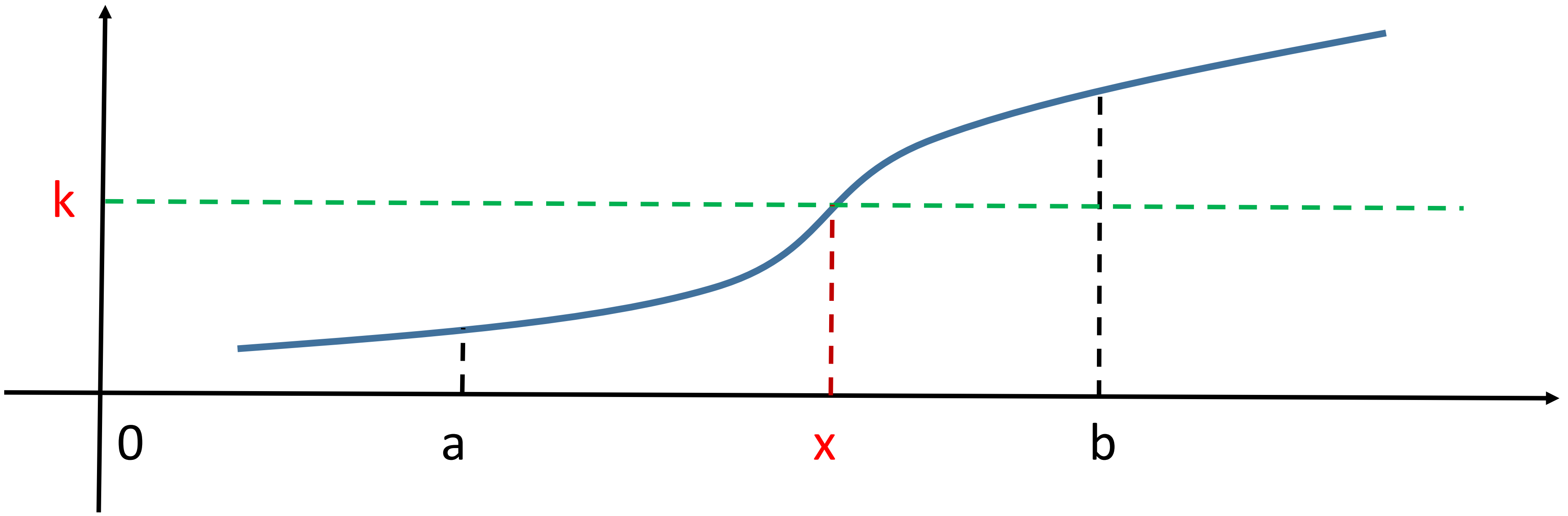
On cherche la solution approchée x dans un intervalle [a ; b] d'une équation du type f(x) = k, où f est une fonction monotone (ayant un seul sens de variation) sur cet intervalle.



Algorithme de Dichotomie

du grec « dicho » (en deux) et « tomie » (couper, comme dans vasectomie, appendicectomie, atome, anatomie…).

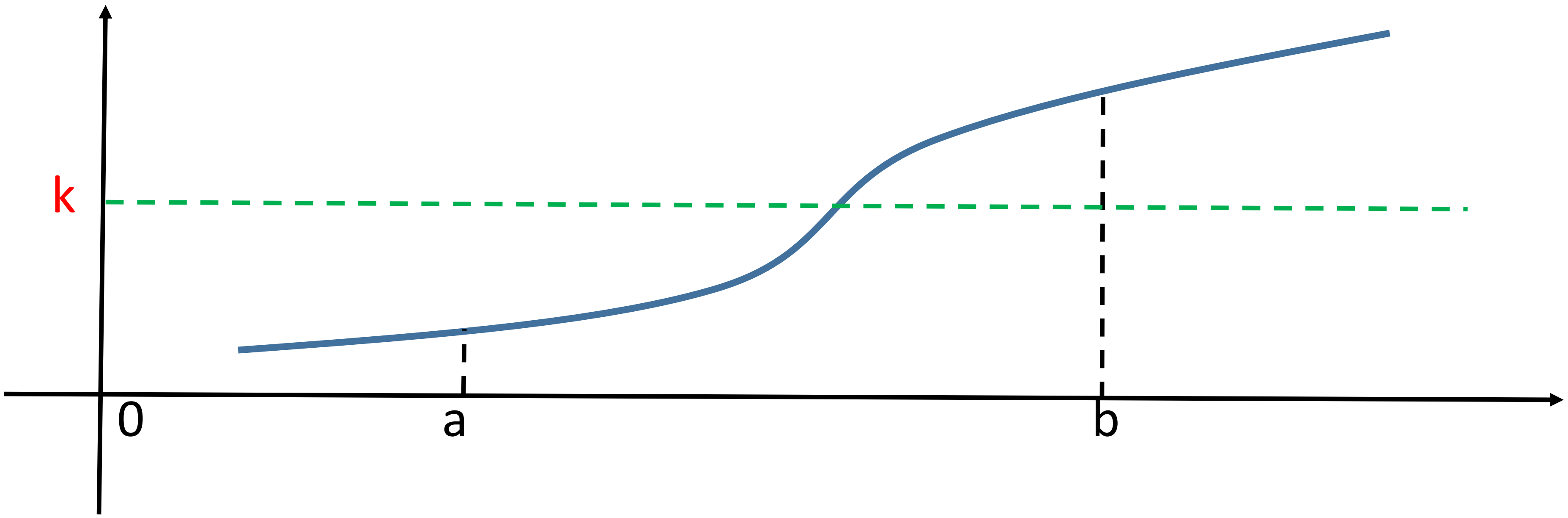
On cherche la solution approchée x dans un intervalle $[a ; b]$ d'une équation du type $f(x) = k$, où f est une fonction monotone (ayant un seul sens de variation) sur cet intervalle.



Algorithme de Dichotomie

On va couper en deux l'intervalle [a ; b] en déterminant son milieu c.

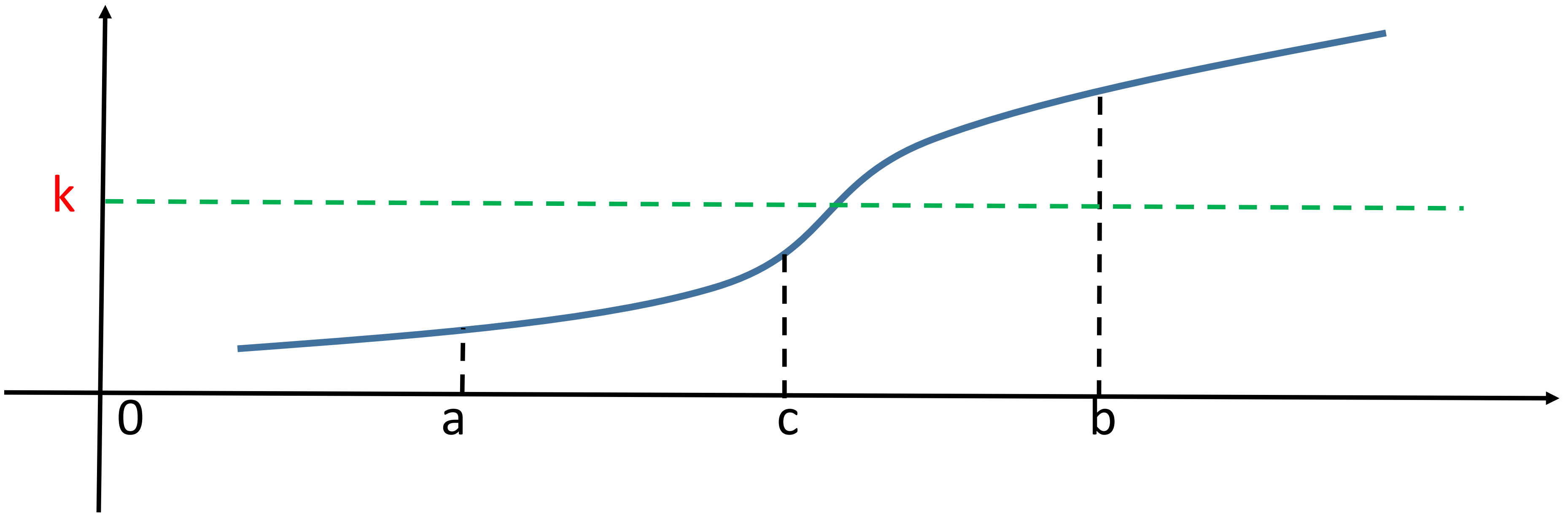
c = …



Algorithme de Dichotomie

On va couper en deux l'intervalle [a ; b] en déterminant son milieu c.

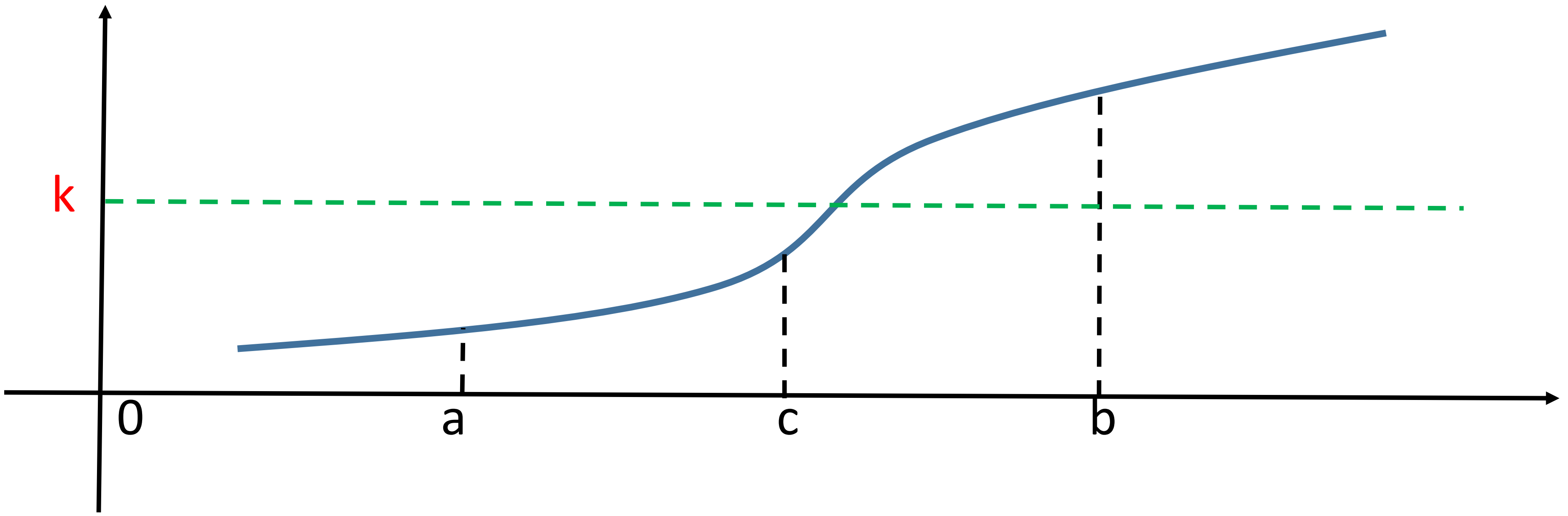
c = (a + b) / 2



Algorithme de Dichotomie

On va couper en deux l'intervalle [a ; b] en déterminant son milieu c.

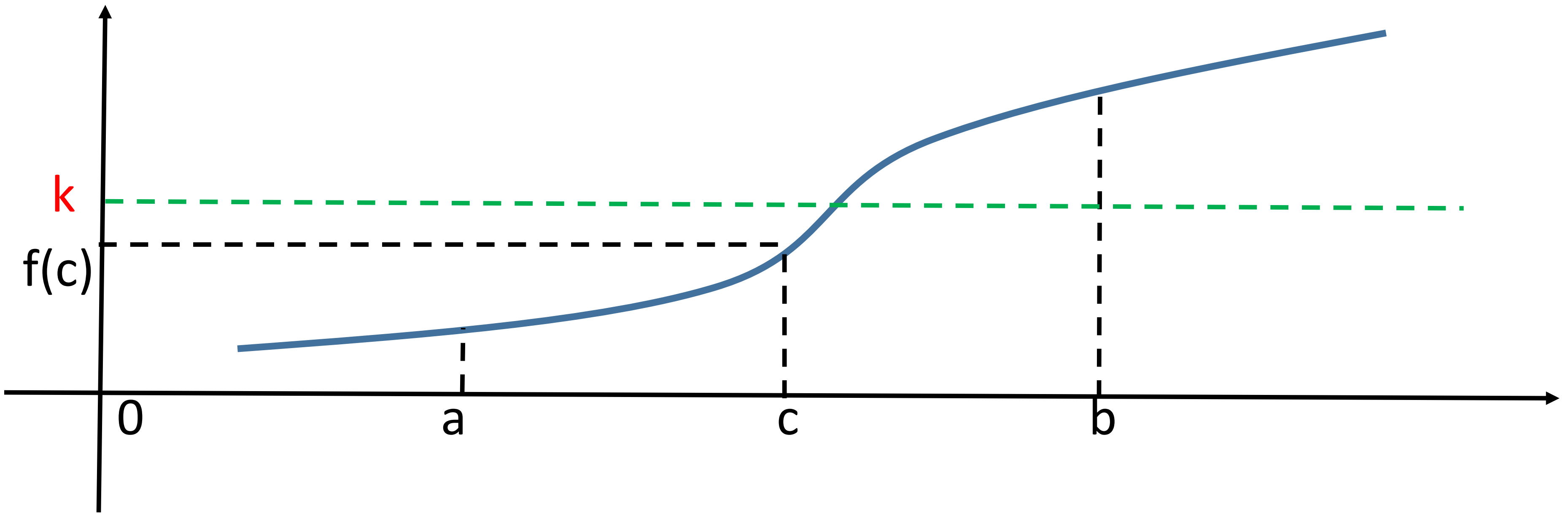
c = (a + b) / 2   puis en déterminant …



Algorithme de Dichotomie

On va couper en deux l'intervalle [a ; b] en déterminant son milieu c.

c = (a + b) / 2   puis en déterminant son image f(c)

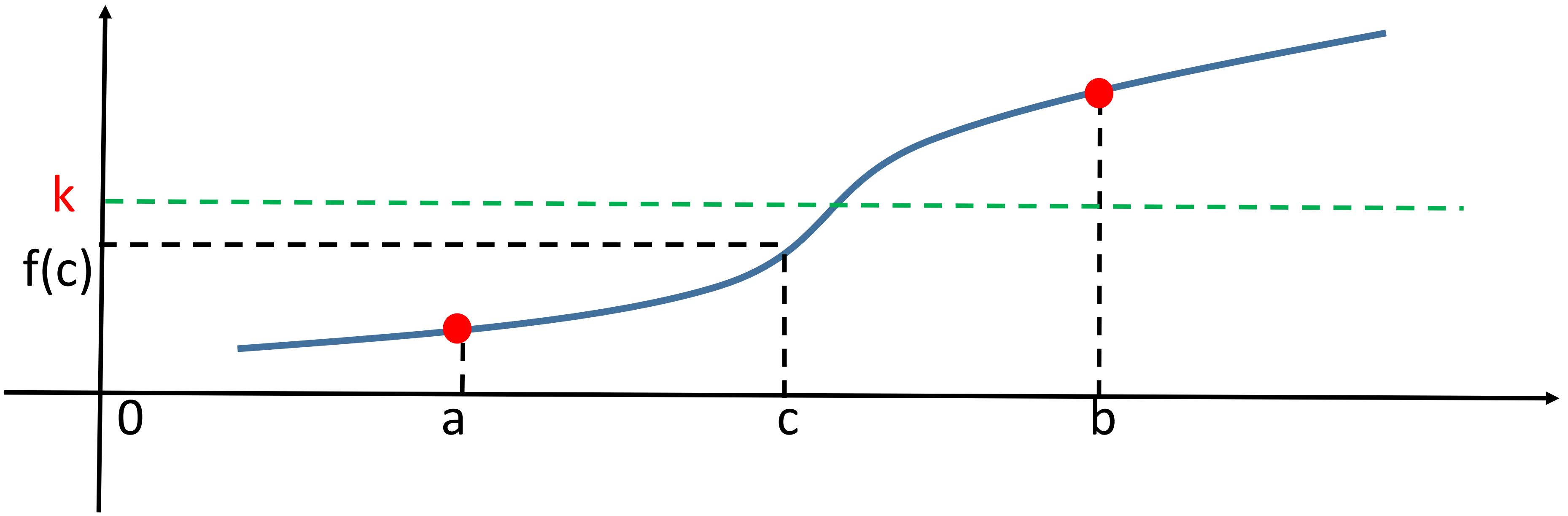


Algorithme de Dichotomie

On va couper en deux l’intervalle [a ; b] en déterminant son milieu c.

c = (a + b) / 2   puis en déterminant son image f(c)

On va recommencer l’étape précédente, mais en …

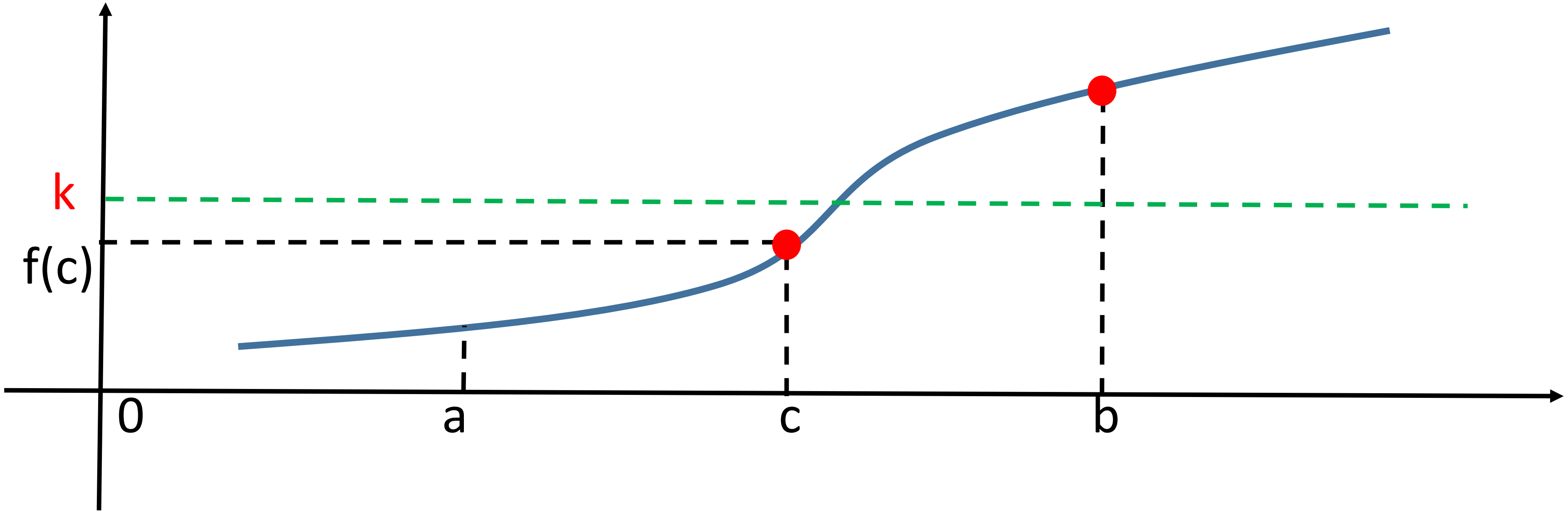


Algorithme de Dichotomie

On va couper en deux l’intervalle [a ; b] en déterminant son milieu c.

c = (a + b) / 2   puis en déterminant son image f(c) = d

On va recommencer l’étape précédente, mais en prenant l’intervalle [c ; b] si …

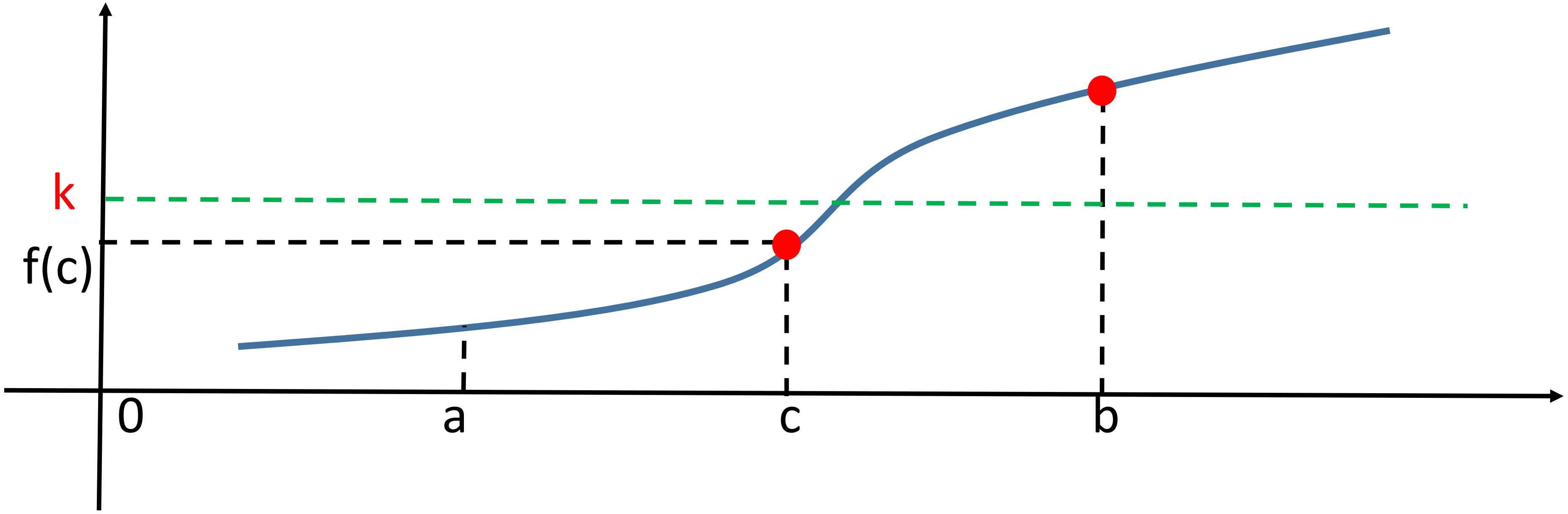


Algorithme de Dichotomie

On va couper en deux l’intervalle [a ; b] en déterminant son milieu c.

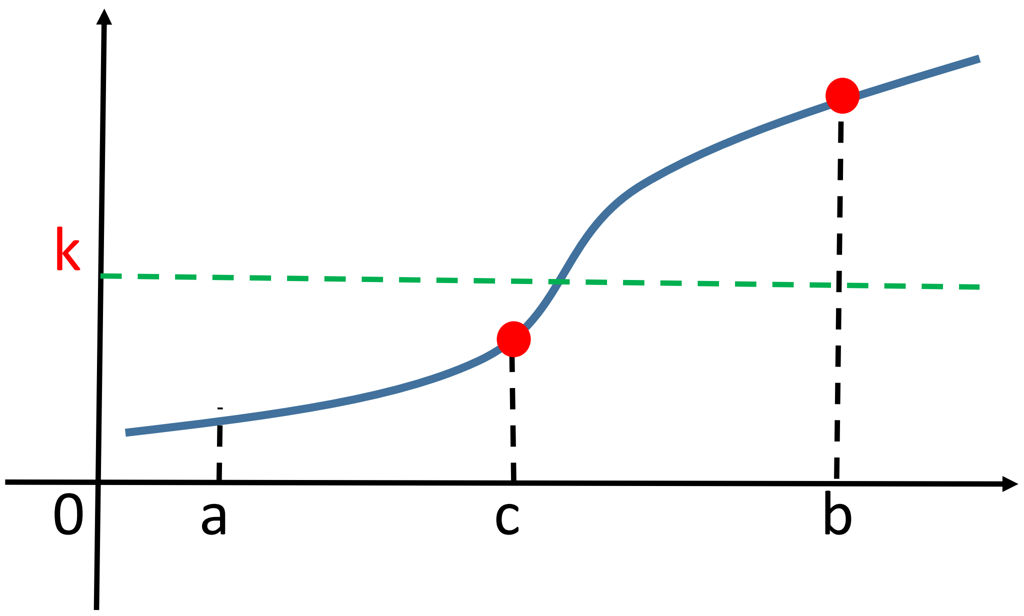
c = (a + b) / 2   puis en déterminant son image f(c) = d

On va recommencer l’étape précédente, mais en prenant l’intervalle [c ; b] si f(c) < k

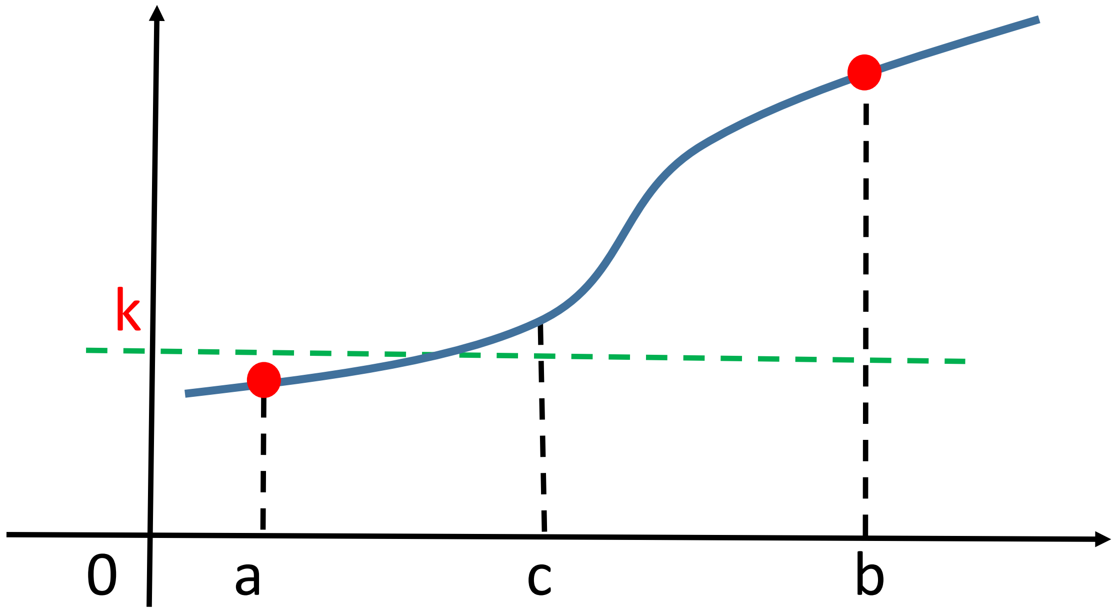


On va recommencer l’étape précédente,

en prenant l’intervalle [c ; b] si f(c) < k

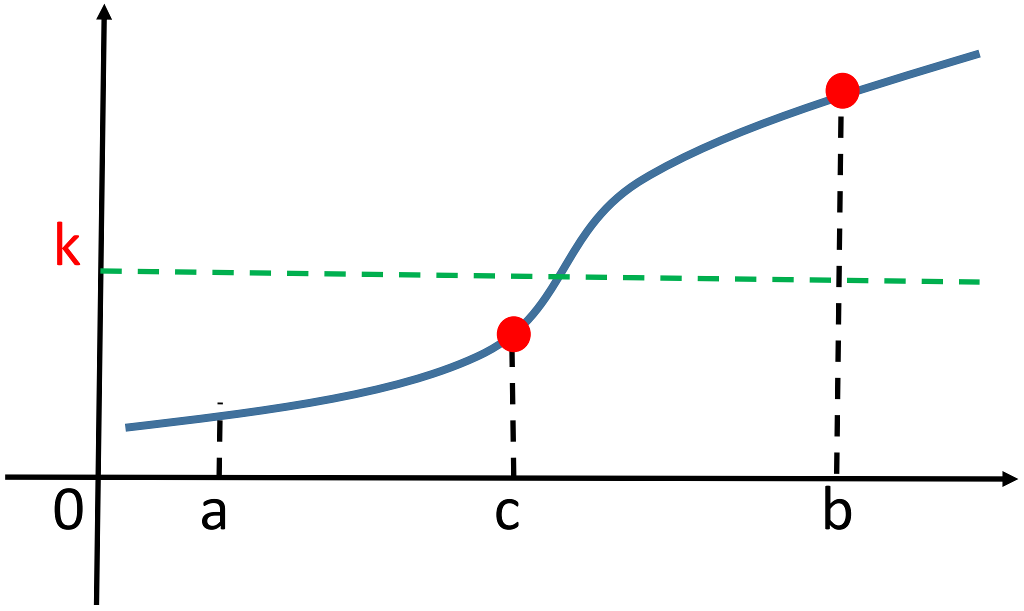


en prenant l’intervalle …

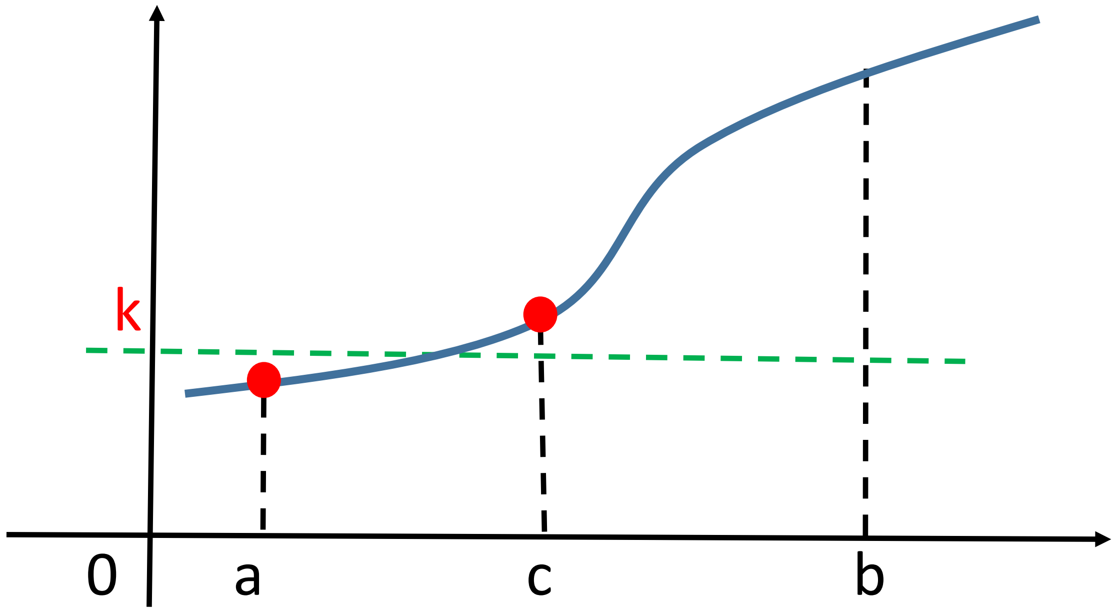


On va recommencer l’étape précédente,

en prenant l’intervalle [c ; b] si f(c) < k

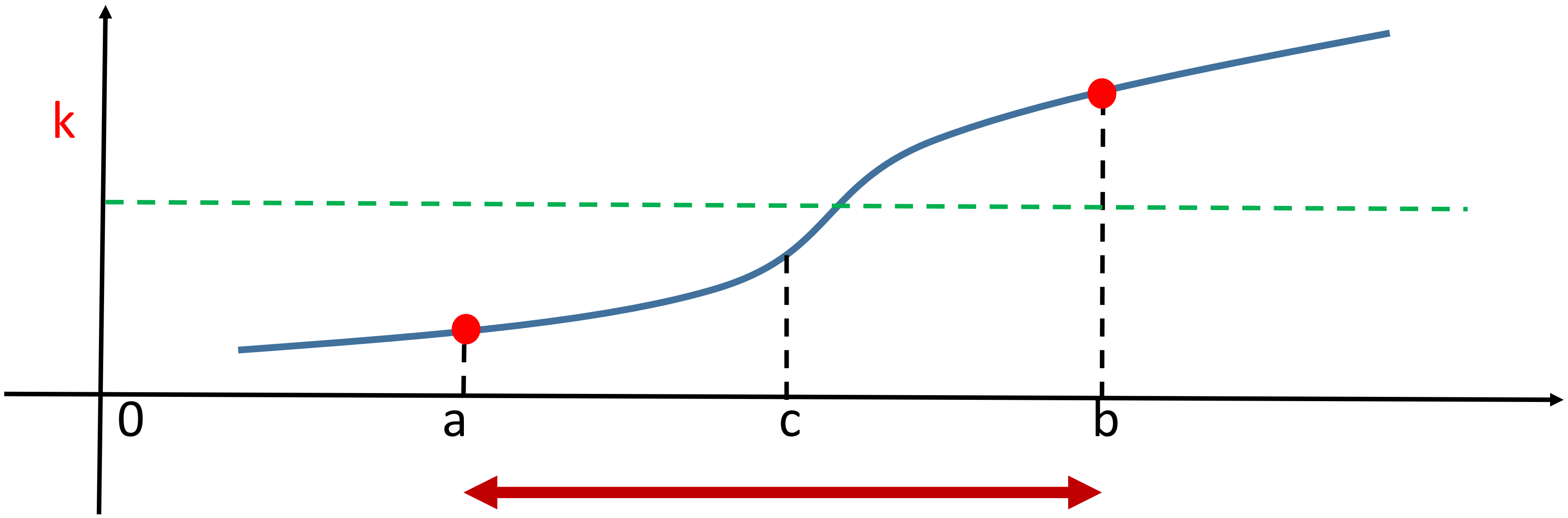


en prenant l’intervalle [a ; c] si f(c) > k



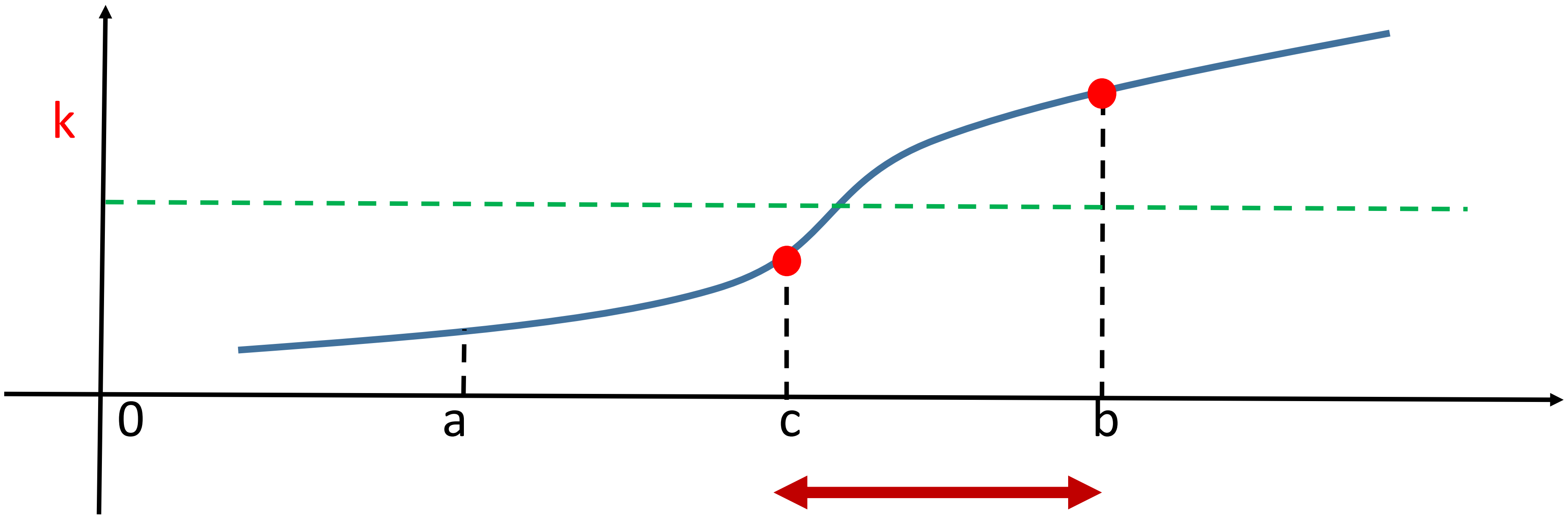
Au fur et à mesure, l'intervalle d'étude va…

…



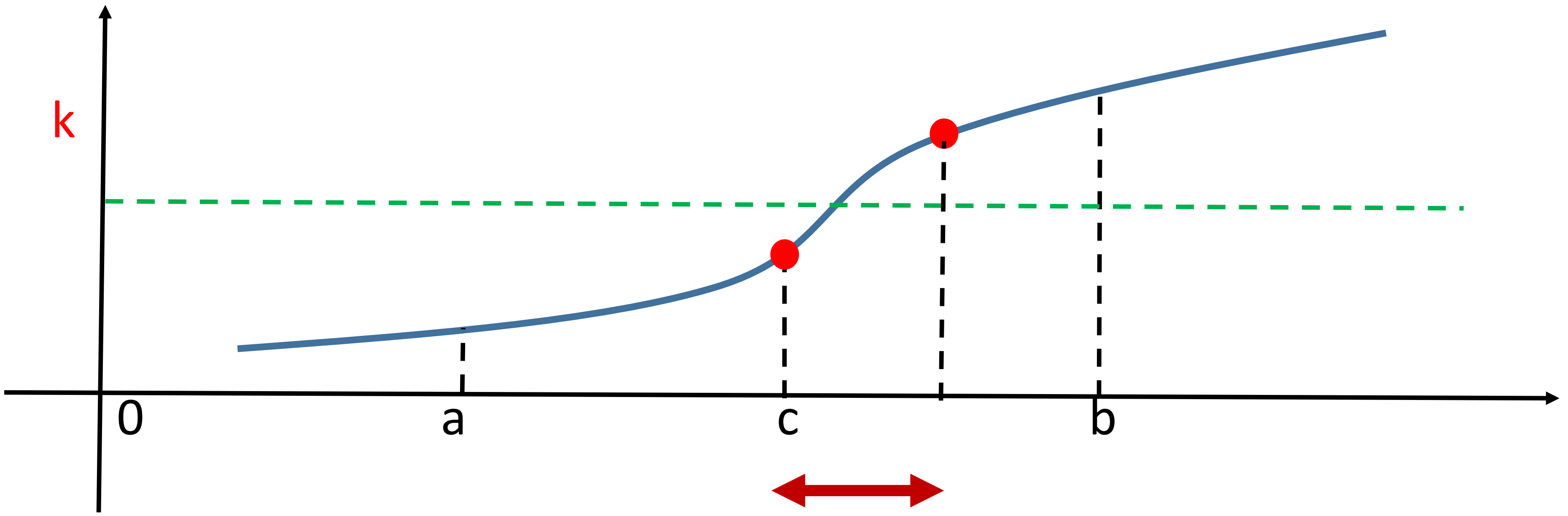
Au fur et à mesure, l'intervalle d'étude va…

…



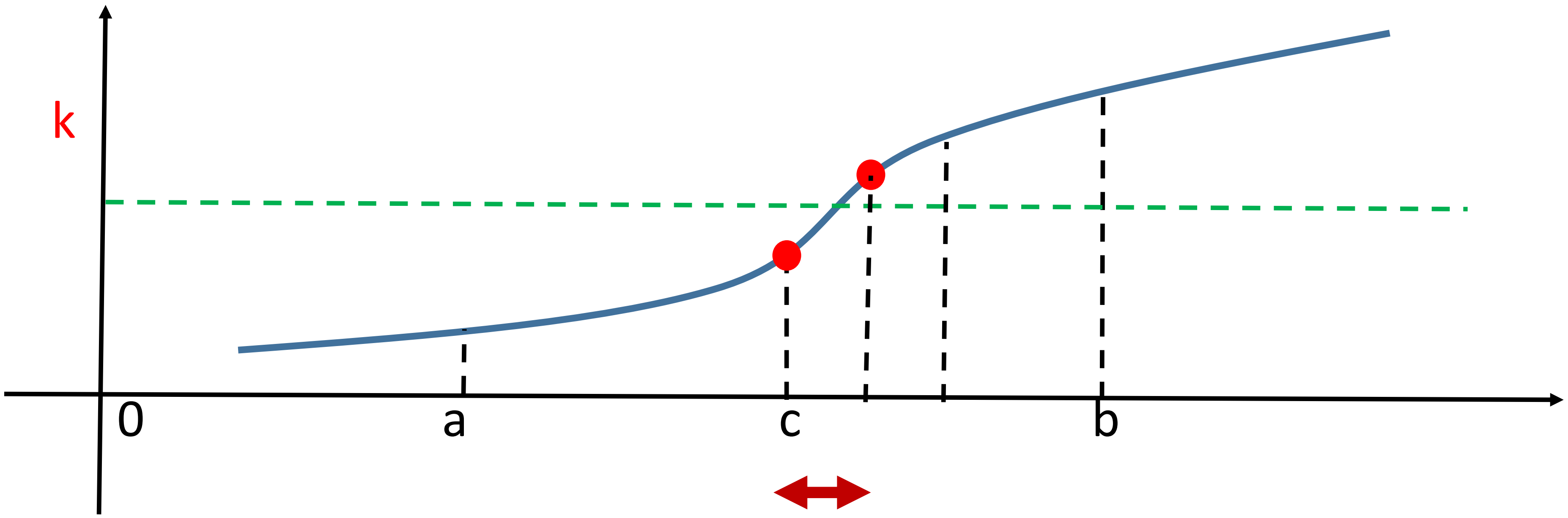
Au fur et à mesure, l'intervalle d'étude va…

…



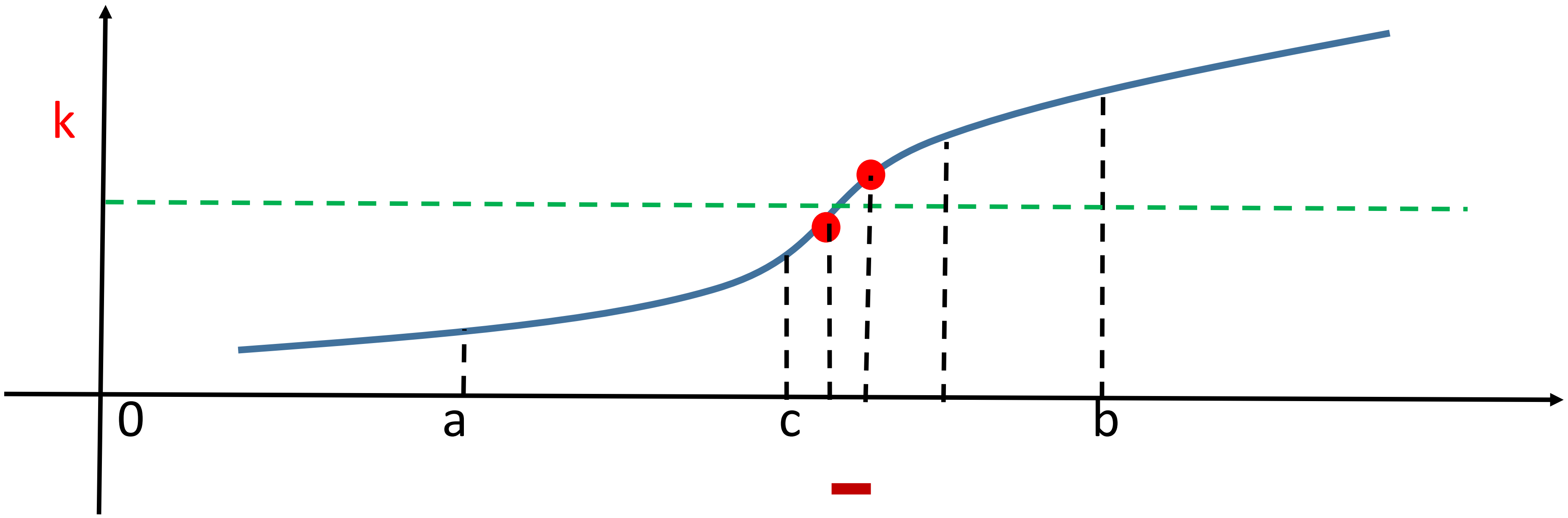
Au fur et à mesure, l'intervalle d'étude va…

…



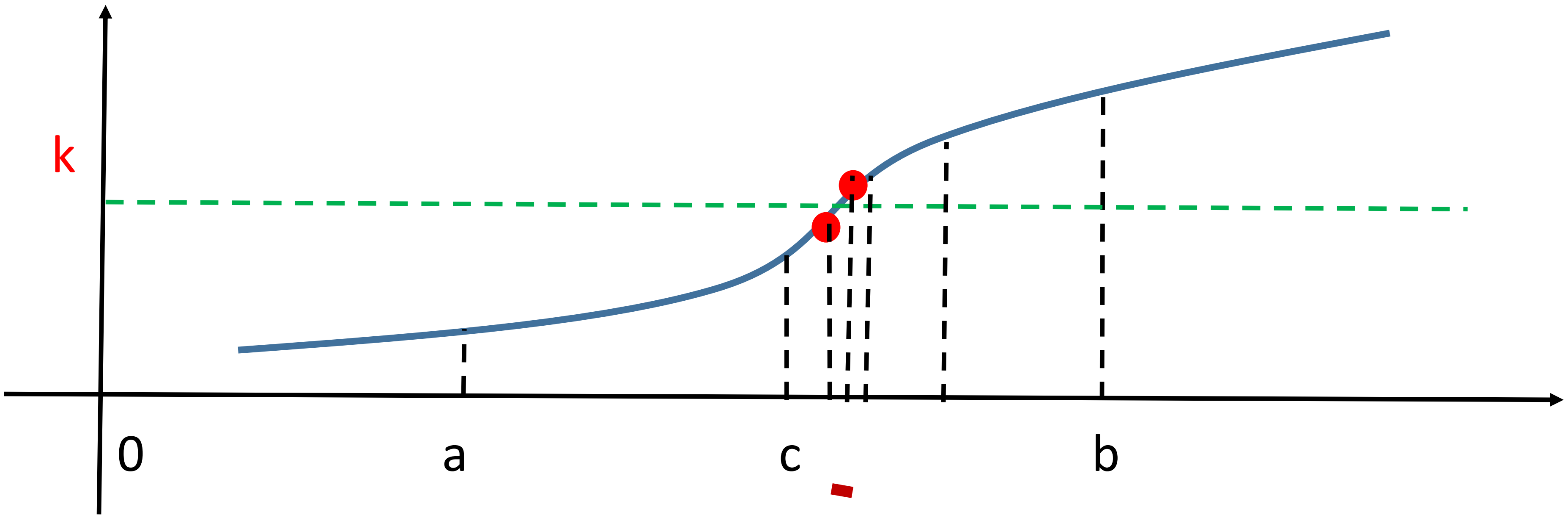
Au fur et à mesure, l'intervalle d'étude va…

…



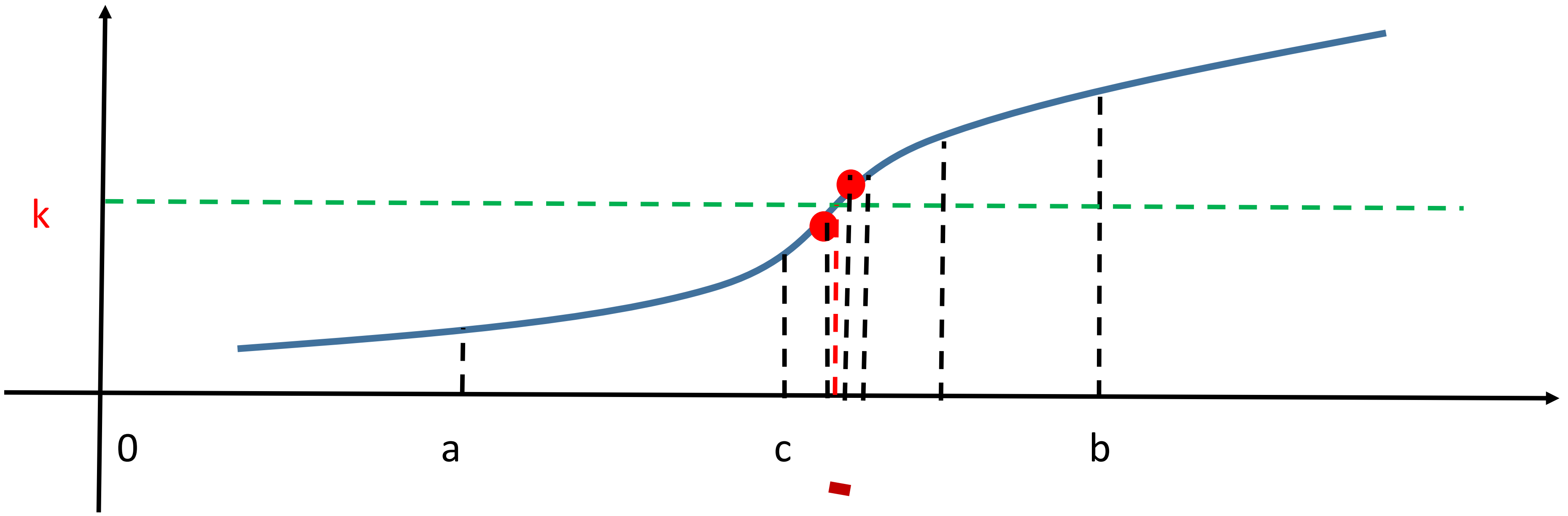
Au fur et à mesure, l'intervalle d'étude va…

diminuer, jusqu'à ce que …



Au fur et à mesure, l'intervalle d'étude va…

diminuer, jusqu'à ce que l'écart soit plus petit que l'imprécision autorisée.



Organigramme :

Données :

On prendra la **fonction carré** (pour une autre fonction, il faudra rentrer dans le programme pour changer l'expression de la fonction).

L'**imprécision** sera de **10^{-5}** sur les images (on peut aussi la faire sur les antécédents).

On veut que l'algorithme permette de donner une solution approchée de l'équation $f(x) = k$,

pour tout réel k sur tout intervalle $[a ; b]$ où la fonction est monotone.

Organigramme :

Données :

On prendra la fonction carré (pour une autre fonction, il faudra rentrer dans le programme pour changer l'expression de la fonction).

L'imprécision sera de $\mathbf{10^{-5}}$ sur les images (on peut aussi la faire sur les antécédents).

donc il faudra s'arrêter lorsque f(c) et k seront distants de moins de $\mathbf{10^{-5}}$

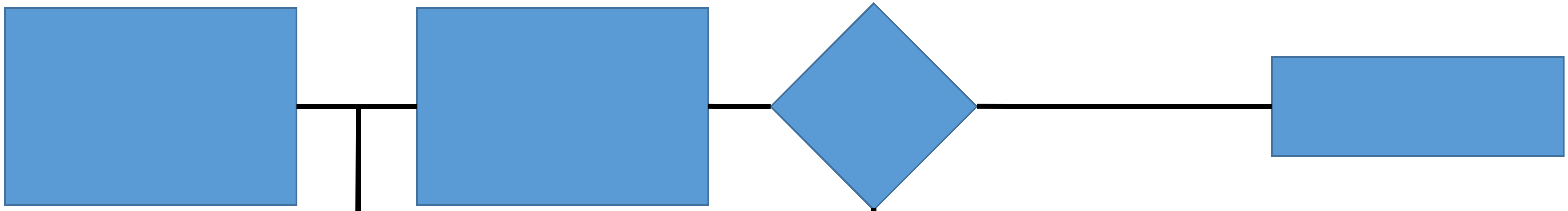
et f(c) peut être sup. ou inf. à k, donc utiliser la valeur absolue $| f(c) - k | \leq \mathbf{10^{-5}}$

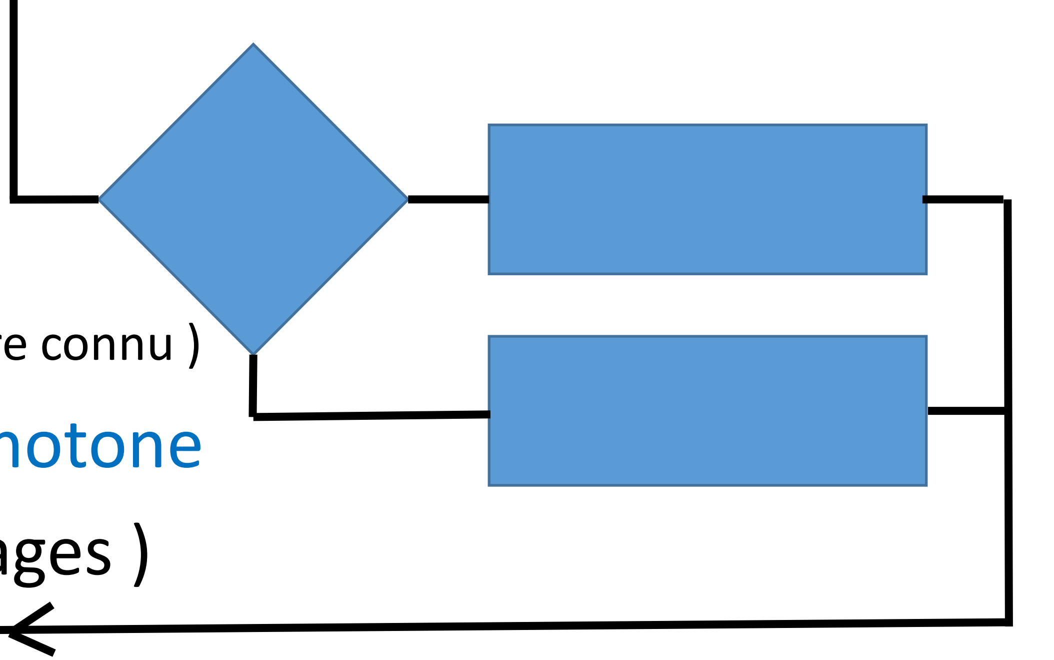
On veut que l'algorithme permette de donner une solution approchée de l'équation f(x) = k sur l'intervalle [a ; b],

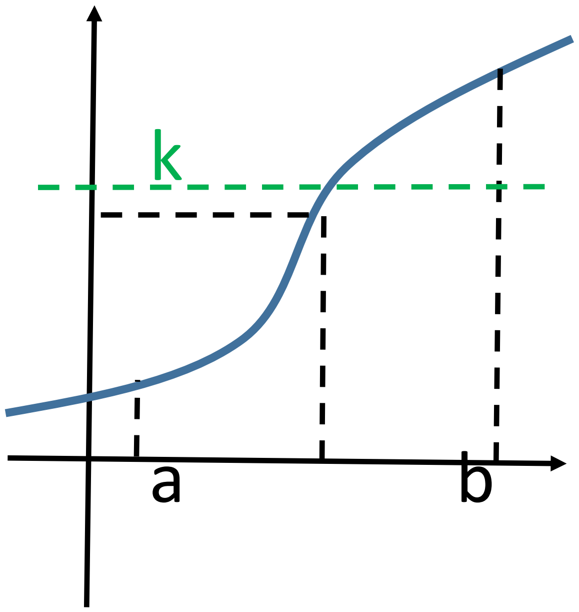
pour tout réel k sur tout intervalle [a ; b] où la fonction est monotone.

donc saisir à chaque utilisation les valeurs de a, b et k.

Organigramme de dichotomie :







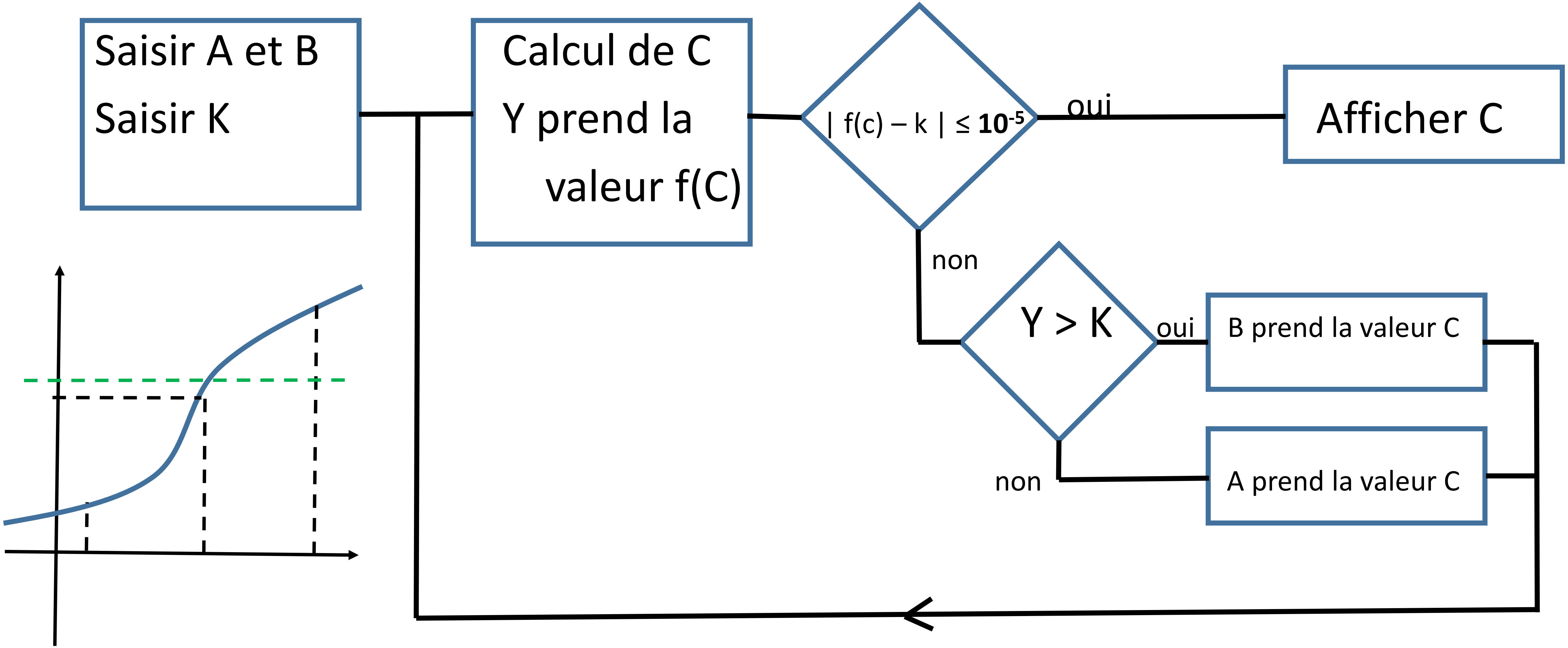
Résolution de

$f(x) = k$ (k est un nombre connu)

sur [a ; b] où f est monotone

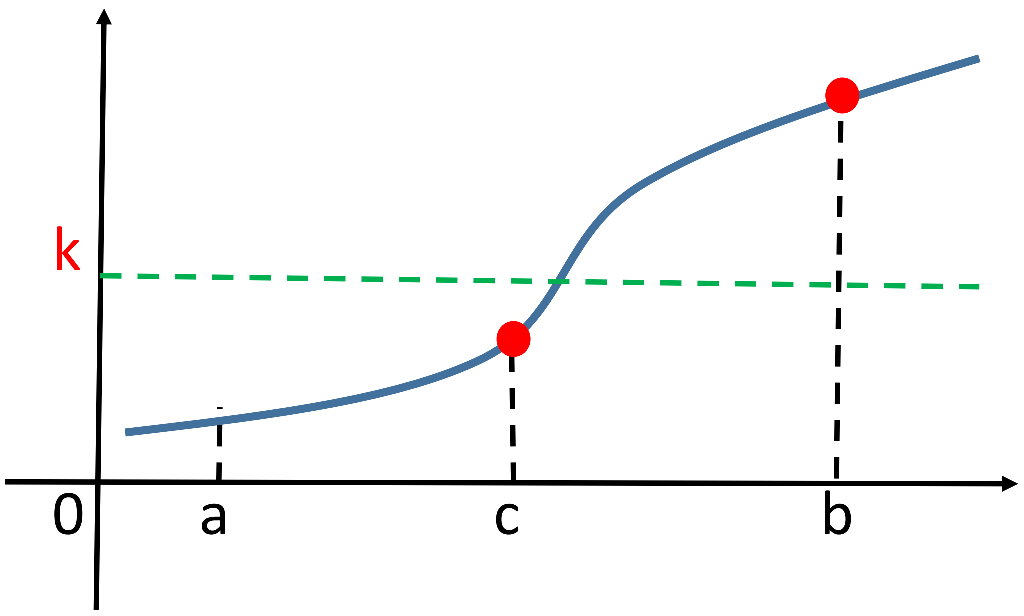
à 10^{-5} près (sur les images)

Organigramme :

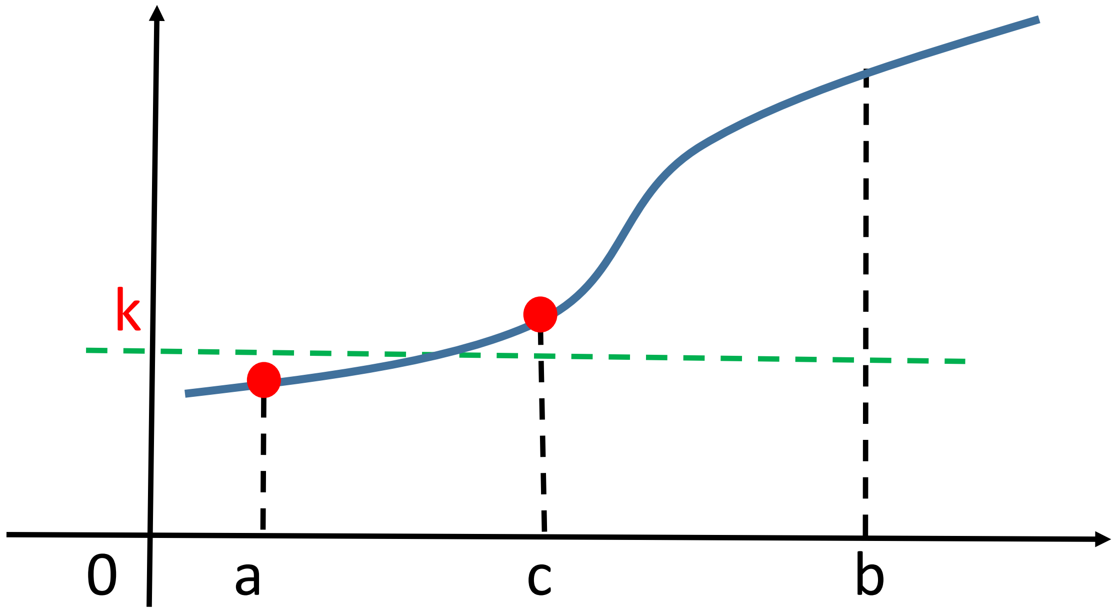


Cet organigramme convient-il à tous les cas ?

a prend la valeur c   si f(c) < k

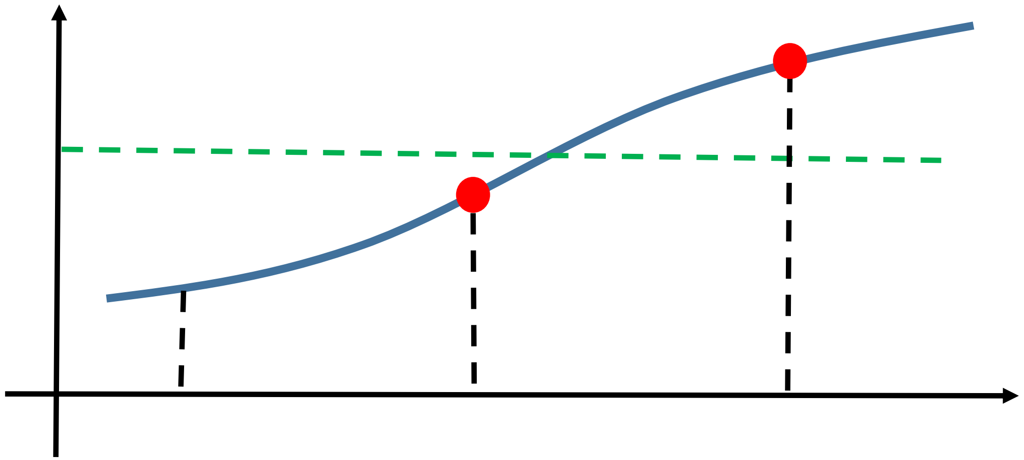


b prend la valeur c   si f(c) > k

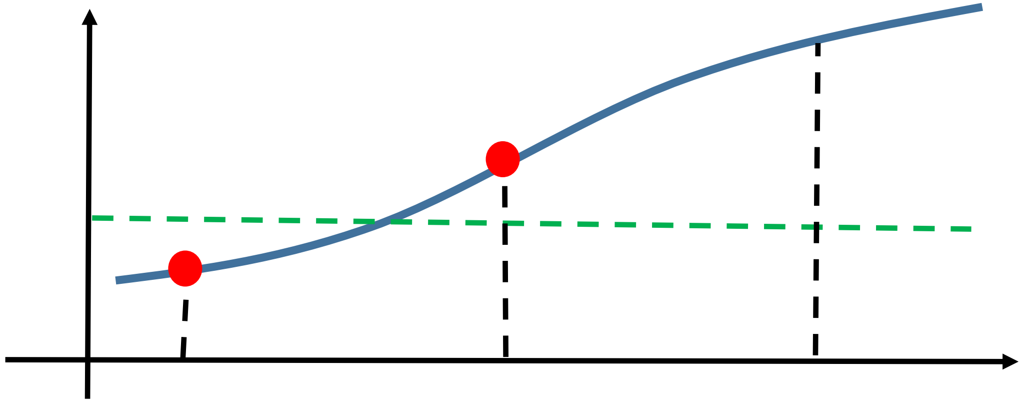


Convient-il pour les cas où la fonction est décroissante ?

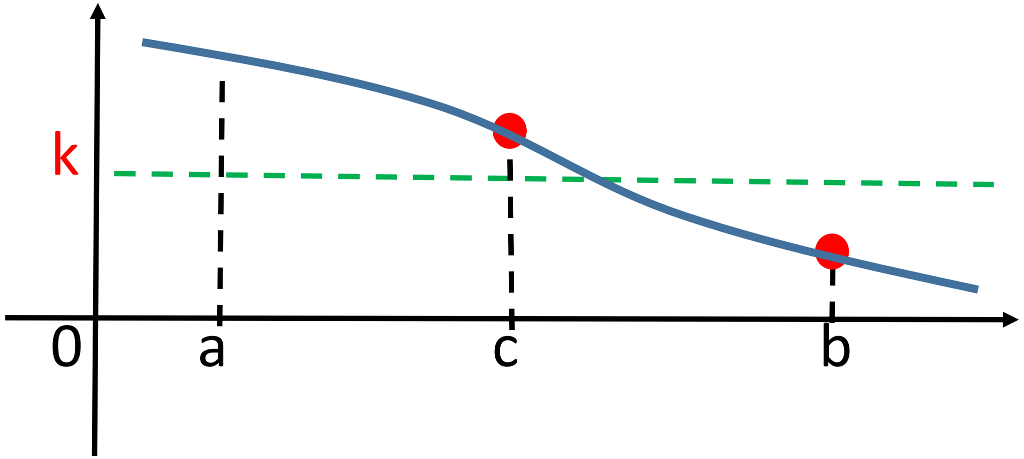
a prend la valeur c si f(c) < k



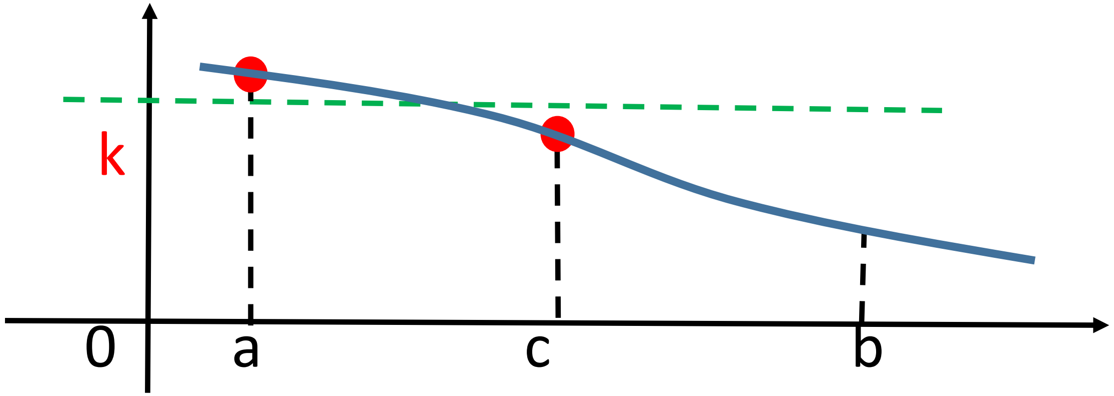
b prend la valeur c si f(c) > k



a prend la valeur c si …

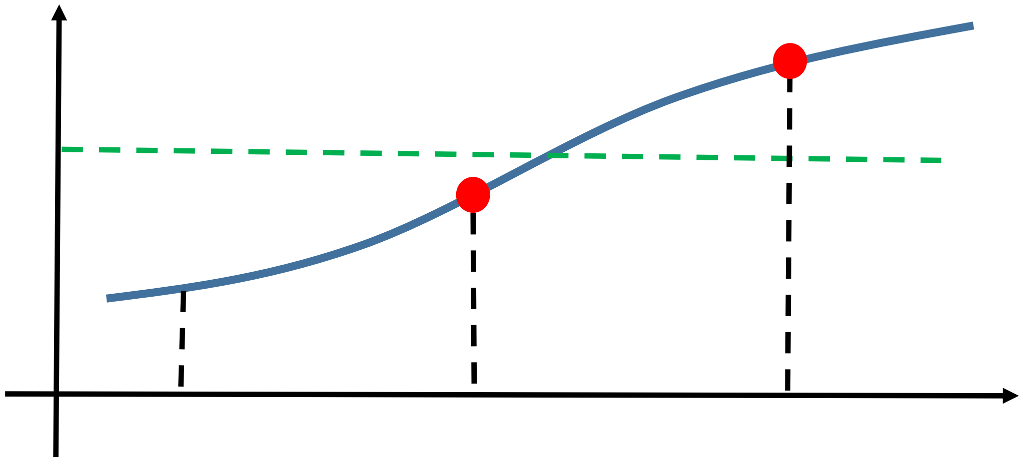


b prend la valeur c si …

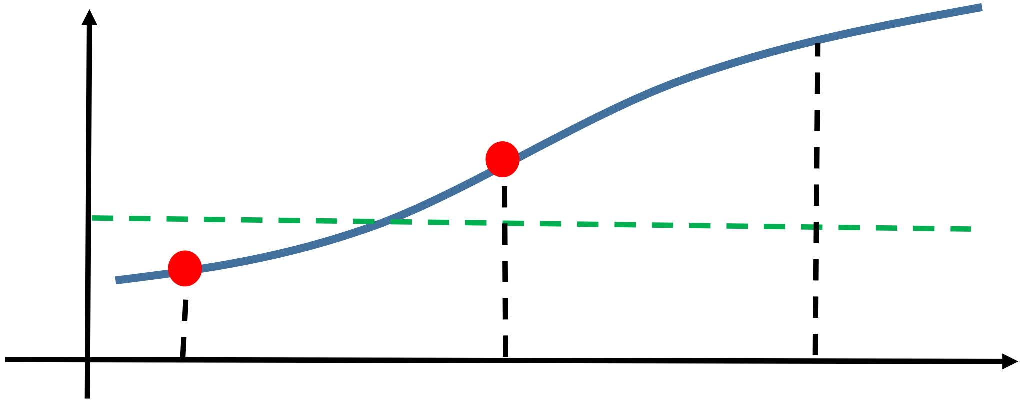


Convient-il pour les cas où la fonction est décroissante ?

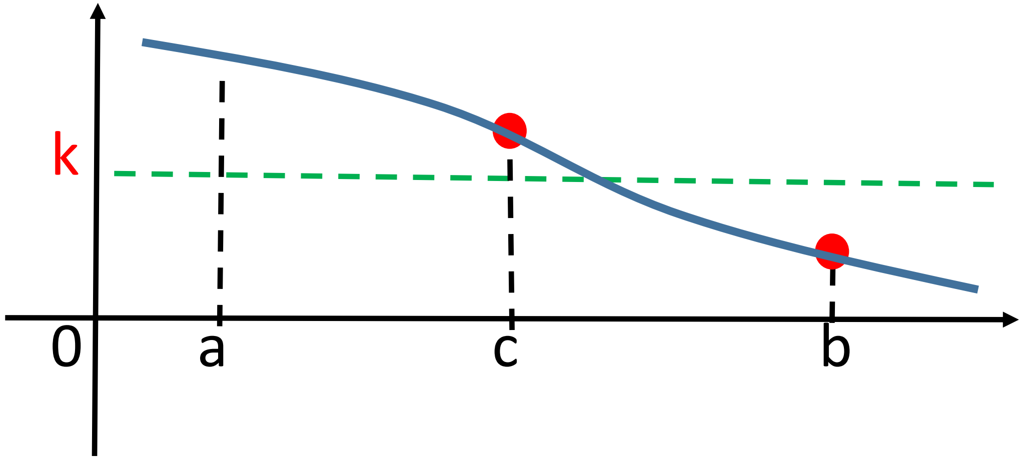
a prend la valeur c si f(c) < k



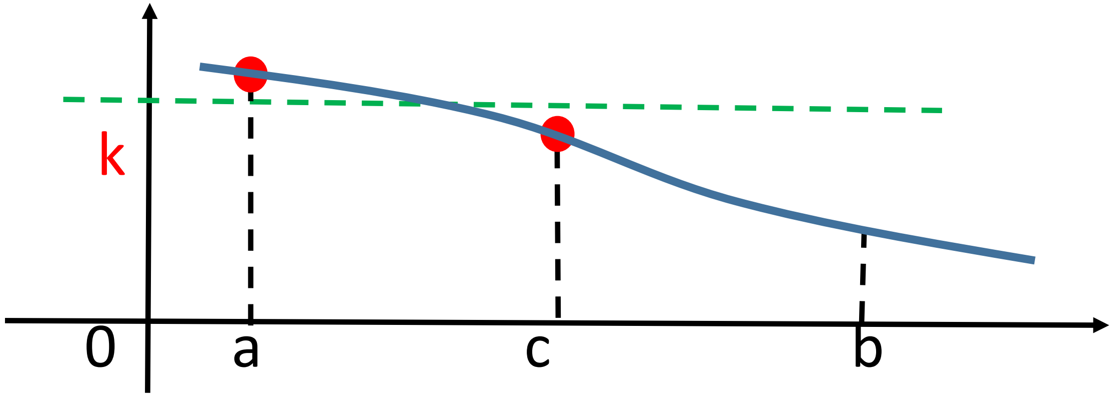
b prend la valeur c si f(c) > k



a prend la valeur c si f(c) > k

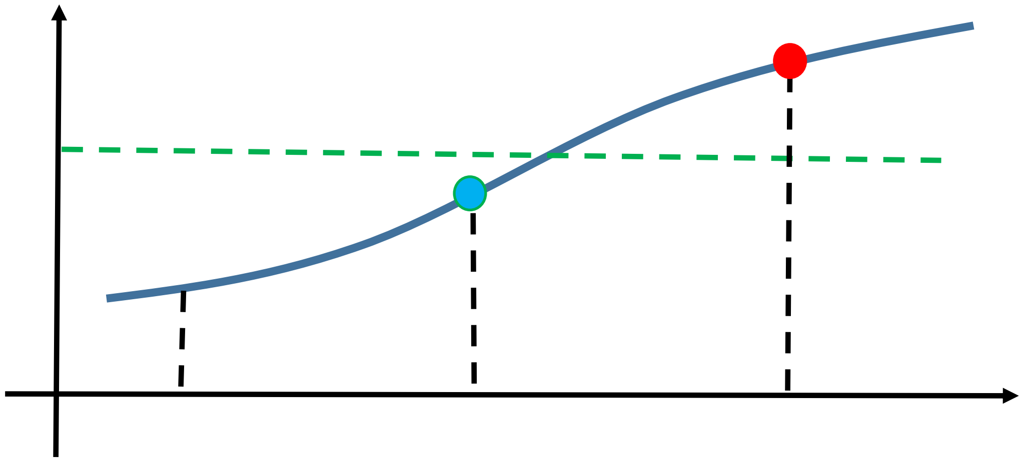


b prend la valeur c si f(c) < k

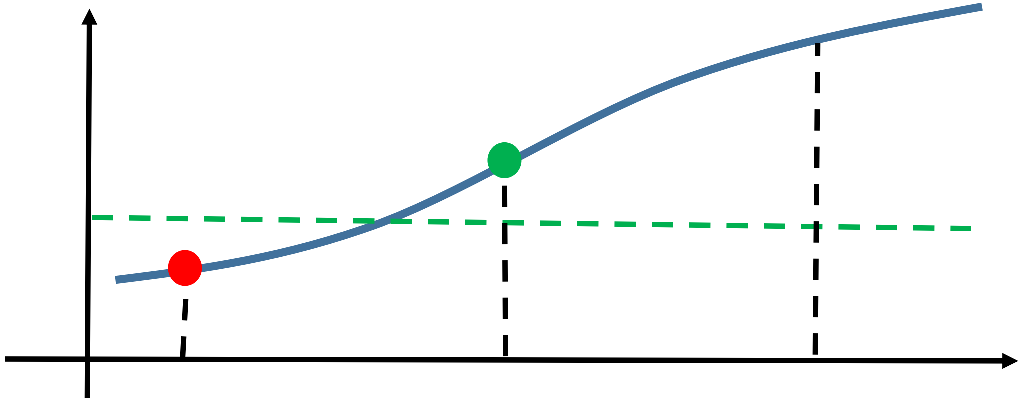


Conclusion : les cas sont inversés.

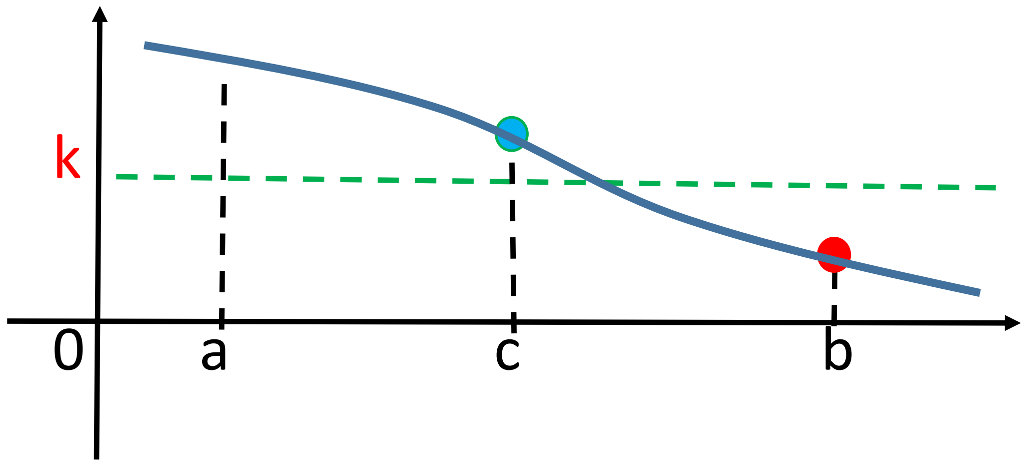
a prend la valeur c si $f(c) < k$



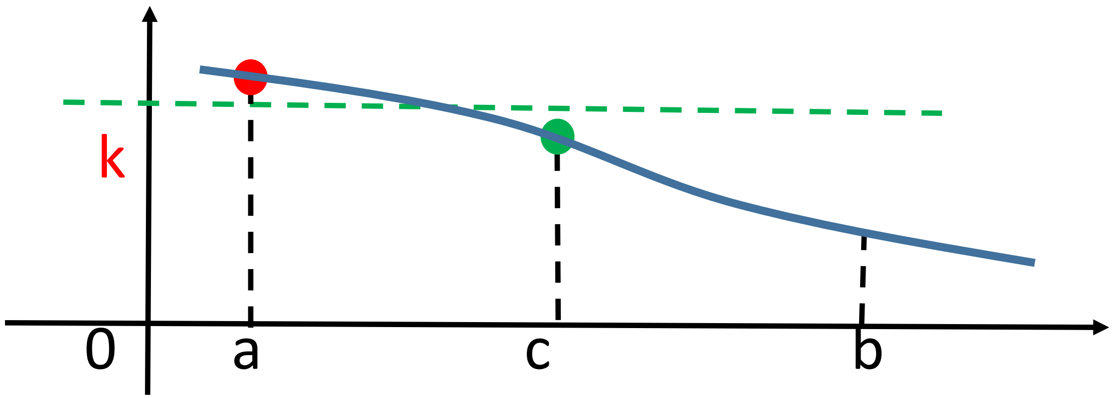
b prend la valeur c si $f(c) > k$



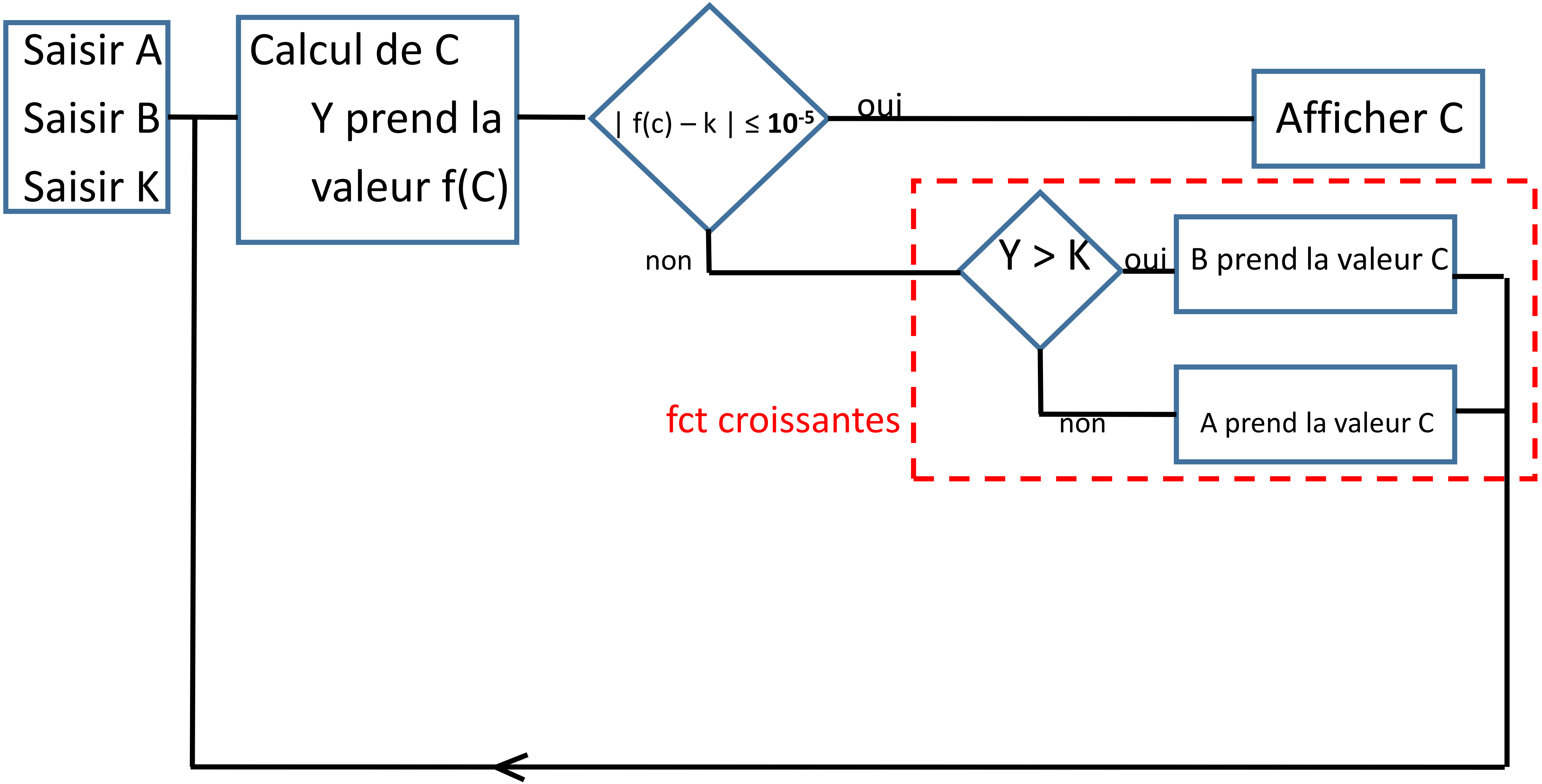
a prend la valeur c si $f(c) > k$



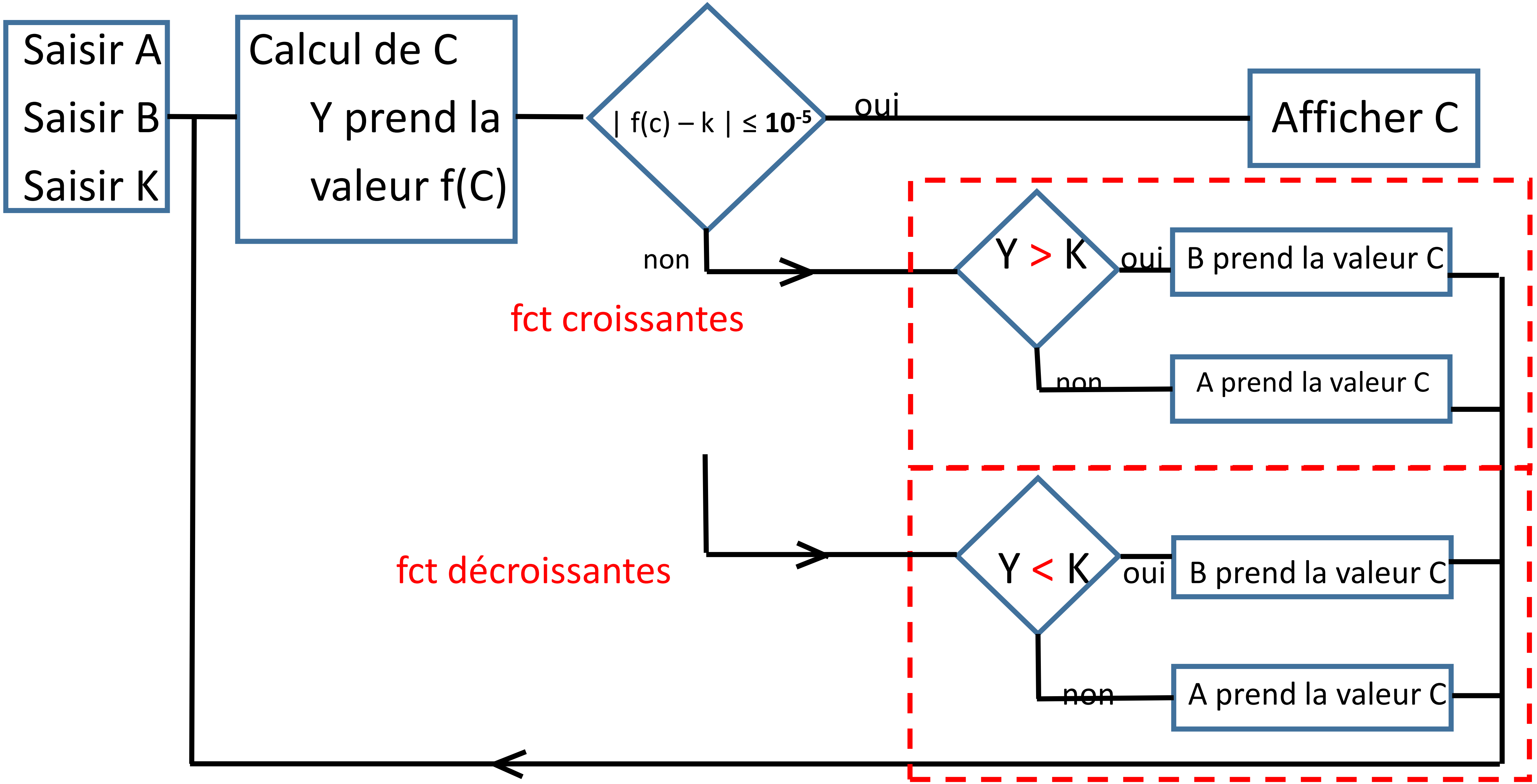
b prend la valeur c si $f(c) < k$



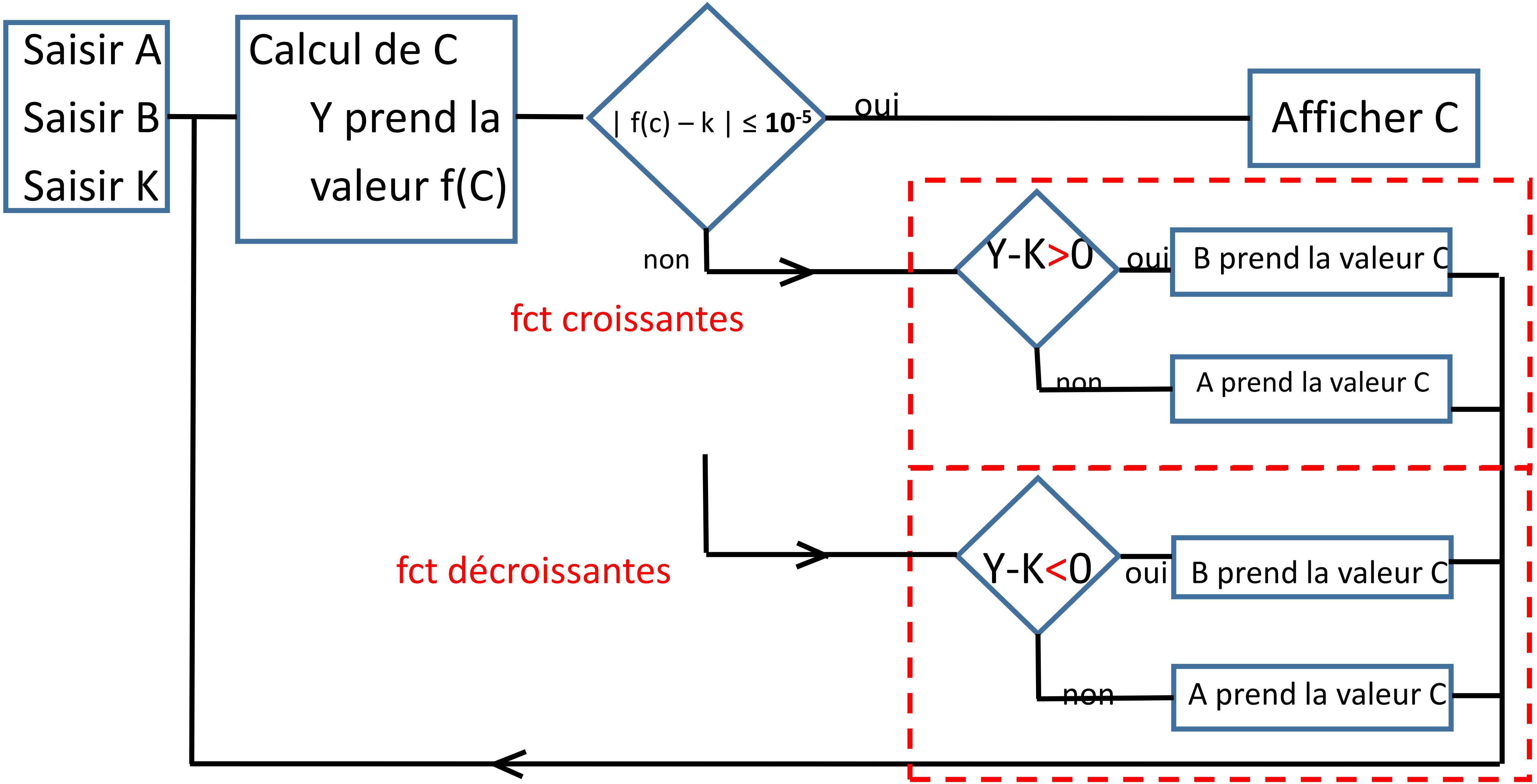
Modification de l'organigramme :



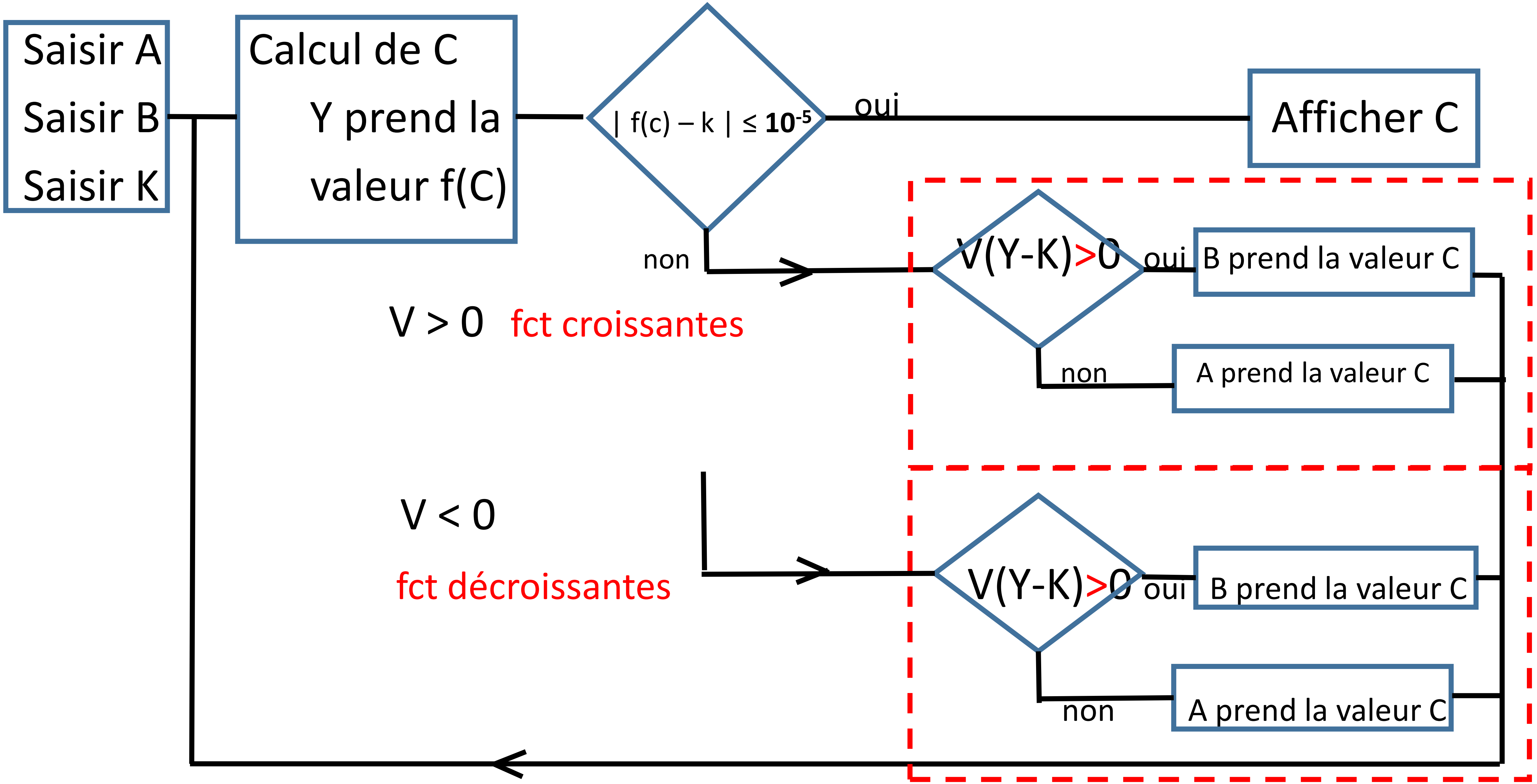
Modification de l'organigramme :



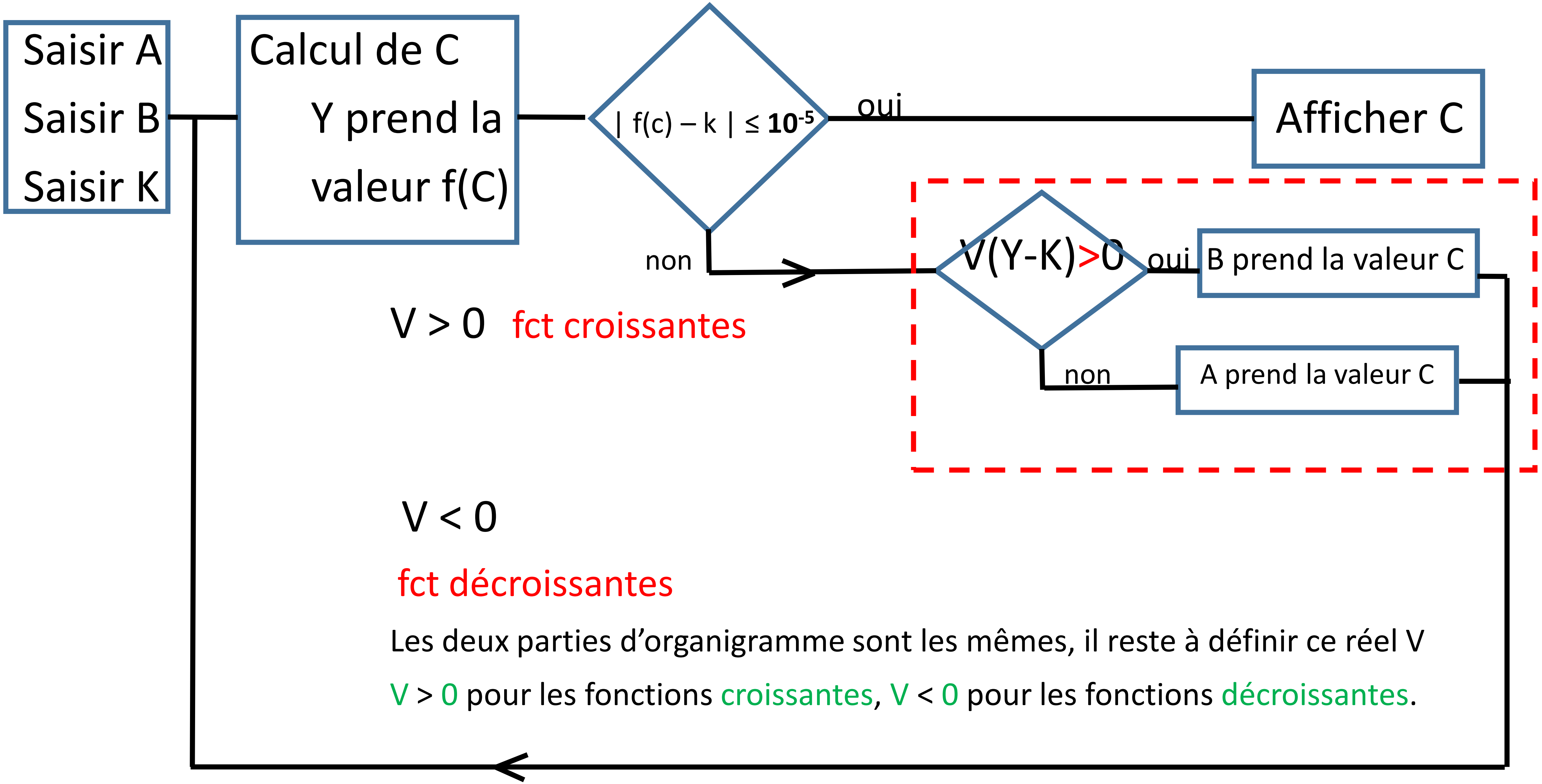
Modification de l'organigramme :



Modification de l'organigramme :



Modification de l’organigramme :



V > 0 fct croissantes

V < 0

fct décroissantes

Les deux parties d’organigramme sont les mêmes, il reste à définir ce réel V

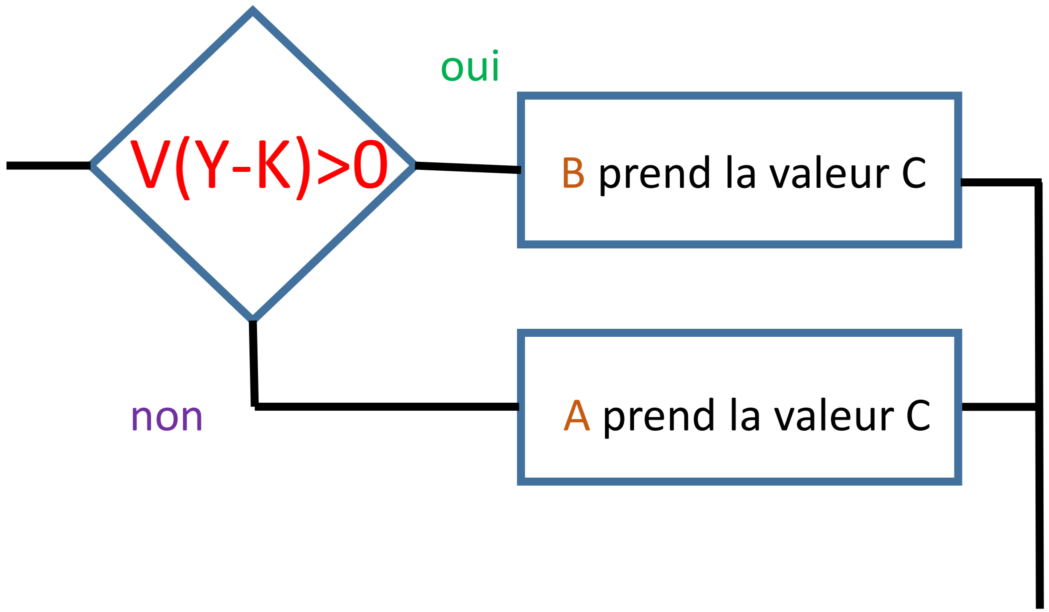
V > 0 pour les fonctions croissantes, V < 0 pour les fonctions décroissantes.

1ère possibilité : V = f'(x) selon le théorème de la monotonie, mais non utilisable en Mode PGM

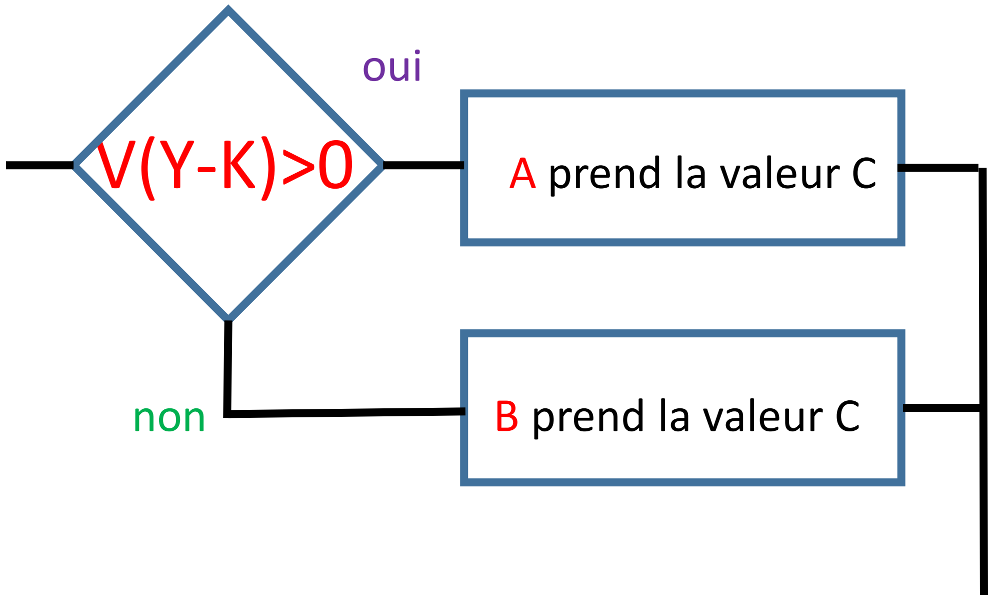
Si Y>K est vrai pour une fct croissante, cela doit donner V > 0 car Y-K > 0

Si Y>K est faux pour une fct décroissante, cela doit donner V < 0 car Y-K < 0

fonctions croissantes :



fonctions décroissantes :

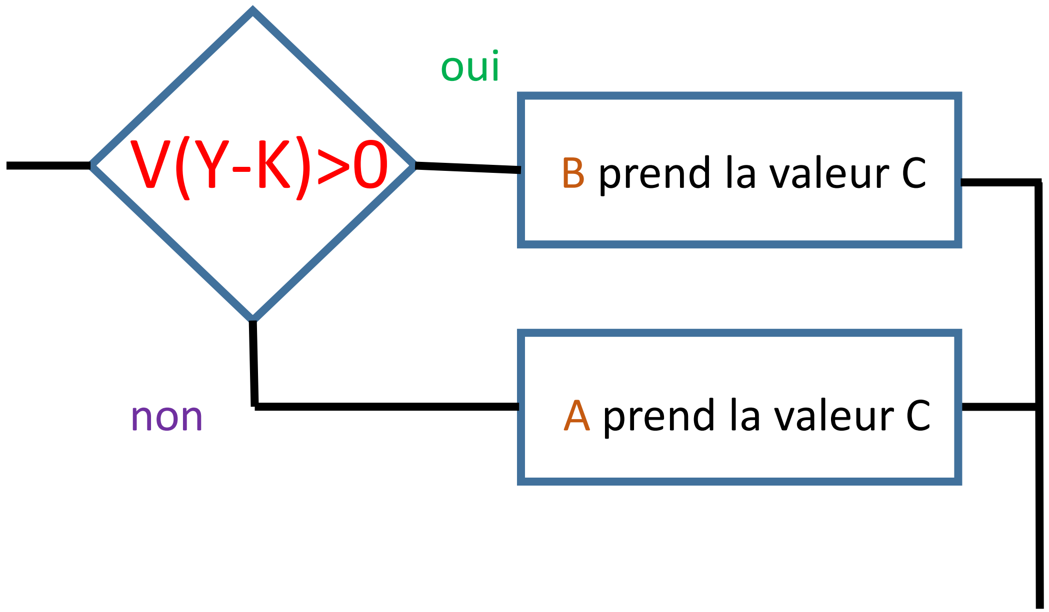


$2^{ème}$ possibilité : $V = f(B) – f(A)$

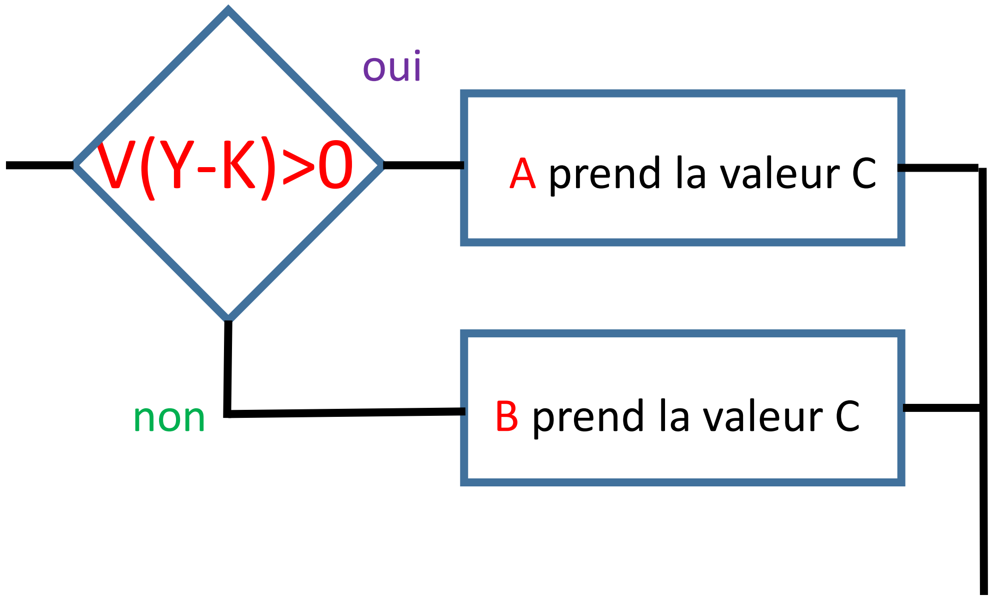
Si Y>K est vrai pour une fct croissante, cela doit donner $V > 0$ car $Y-K > 0$

Si Y>K est faux pour une fct décroissante, cela doit donner $V < 0$ car $Y-K < 0$

fonctions croissantes :



fonctions décroissantes :

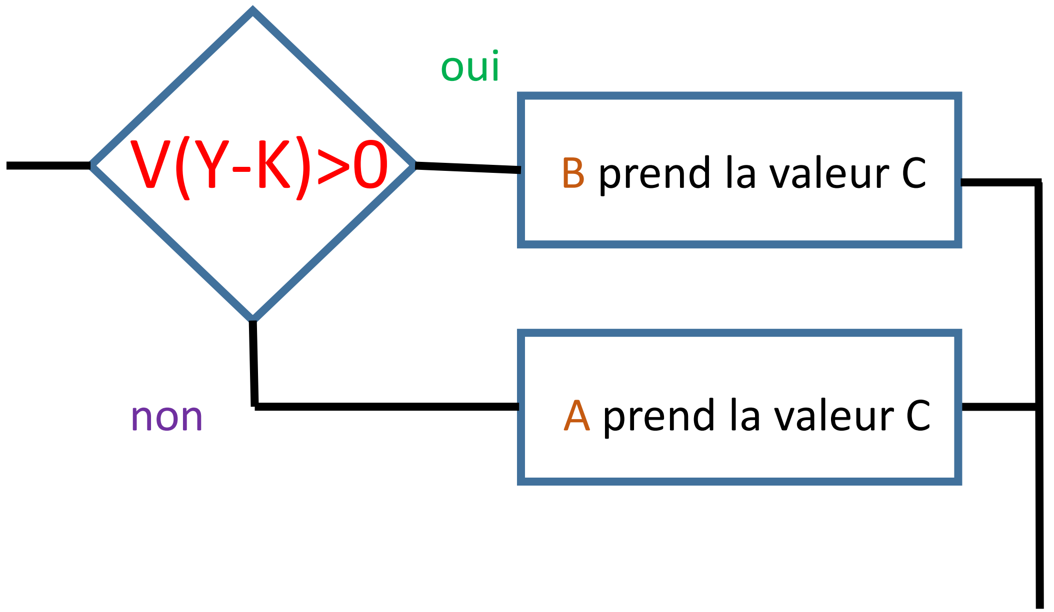


$V = f(B) – f(A)$ car $A < B$ et la fct croissante conserve l'ordre, donc $f(A) < f(B)$ donc $f(B) – f(A) > 0$
et la fct décroissante donne $f(B) – f(A) < 0$

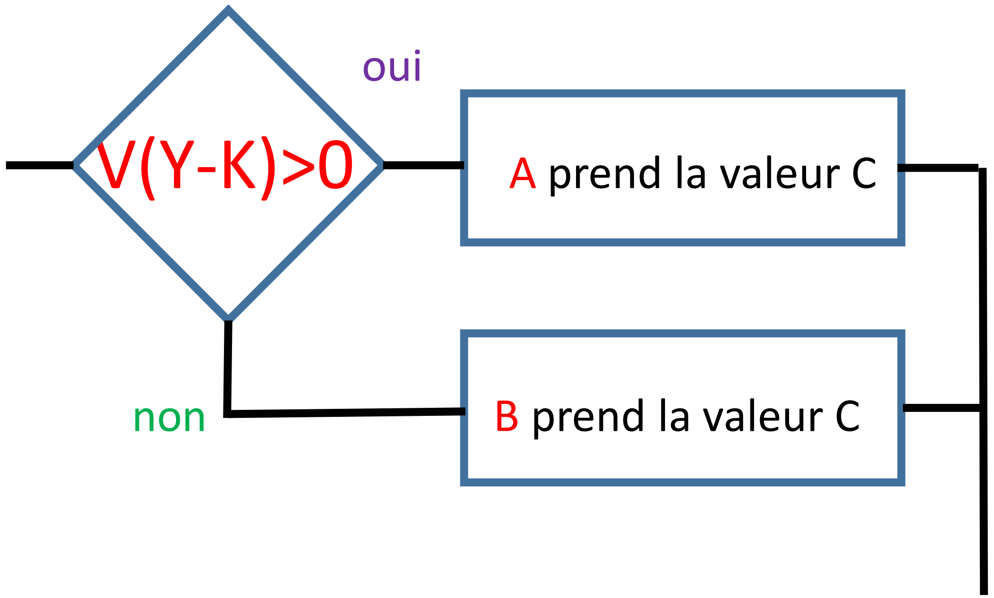
Si Y>K est vrai pour une fct croissante, cela doit donner $V > 0$ car $Y-K > 0$

Si Y>K est faux pour une fct décroissante, cela doit donner $V < 0$ car $Y-K < 0$

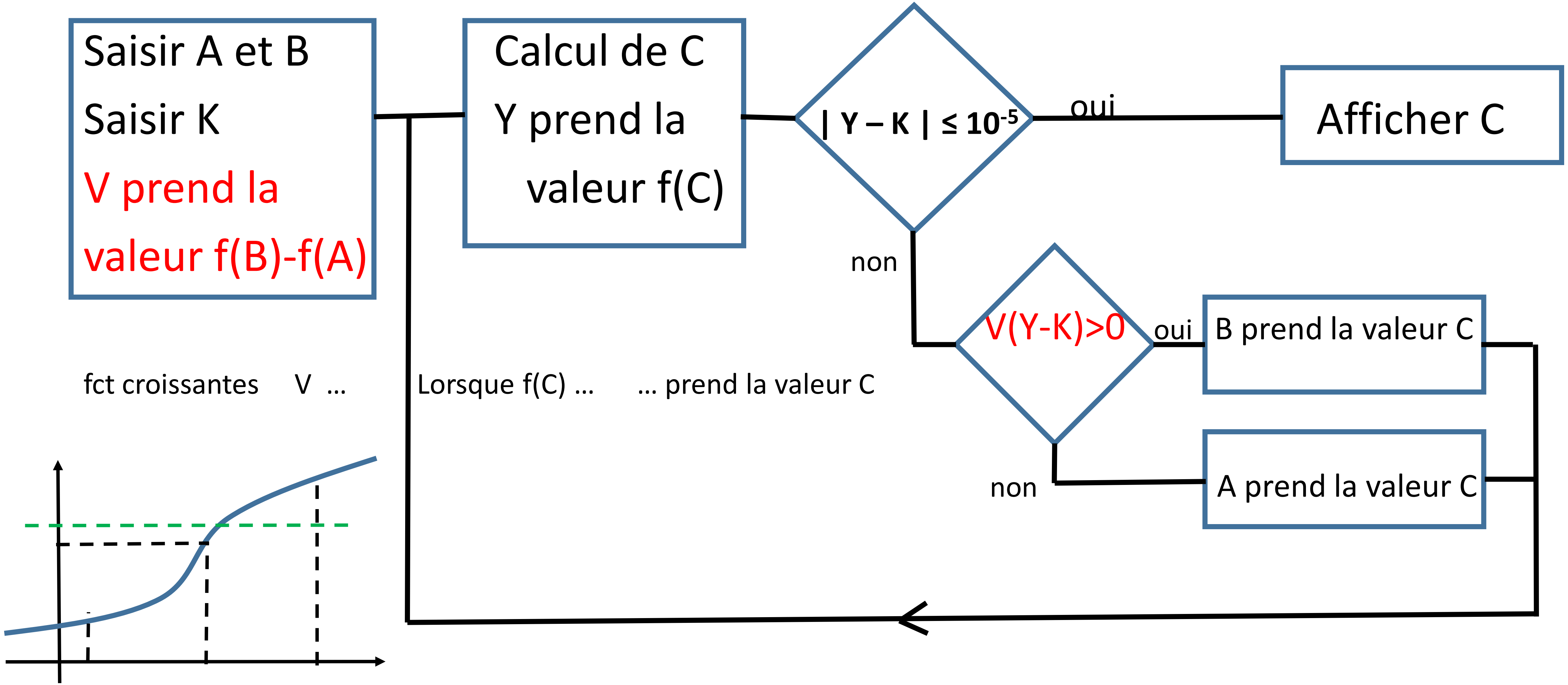
fonctions croissantes :



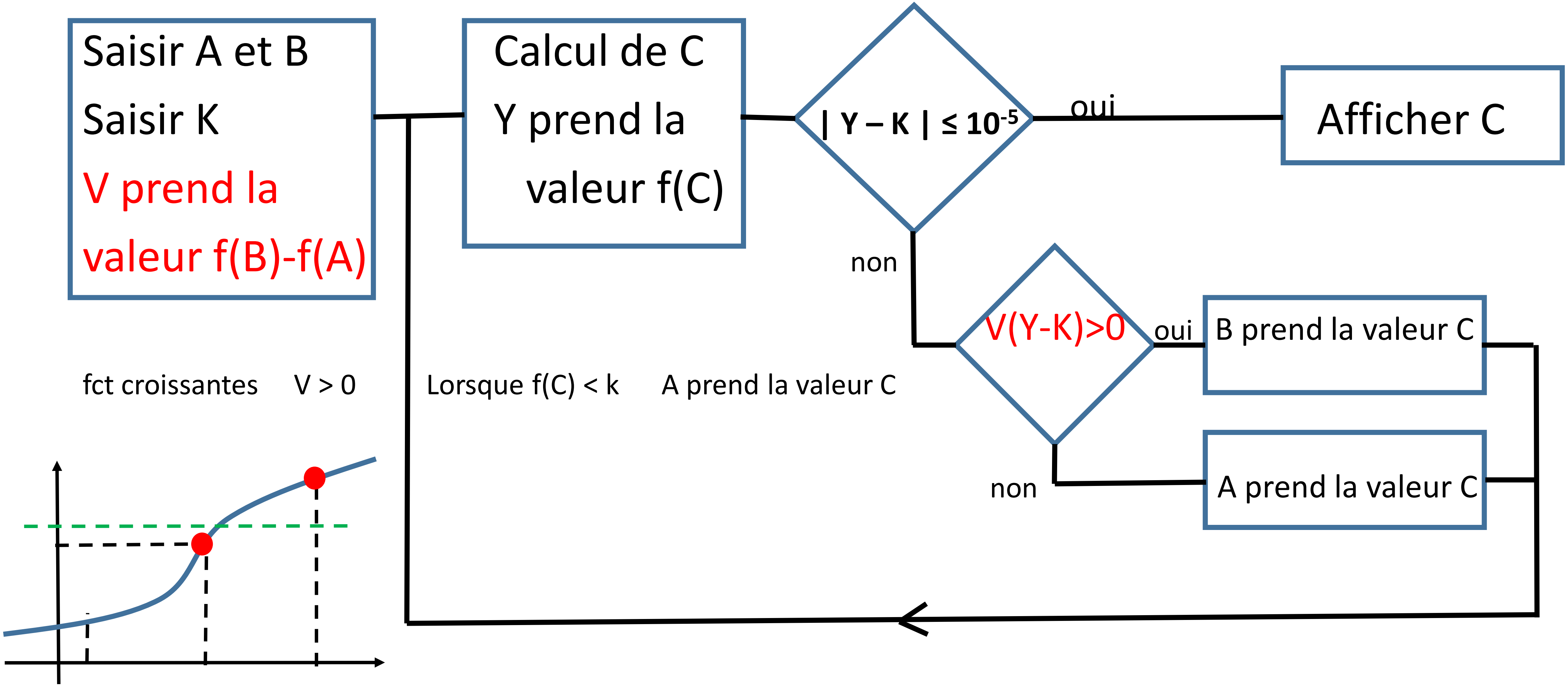
fonctions décroissantes :



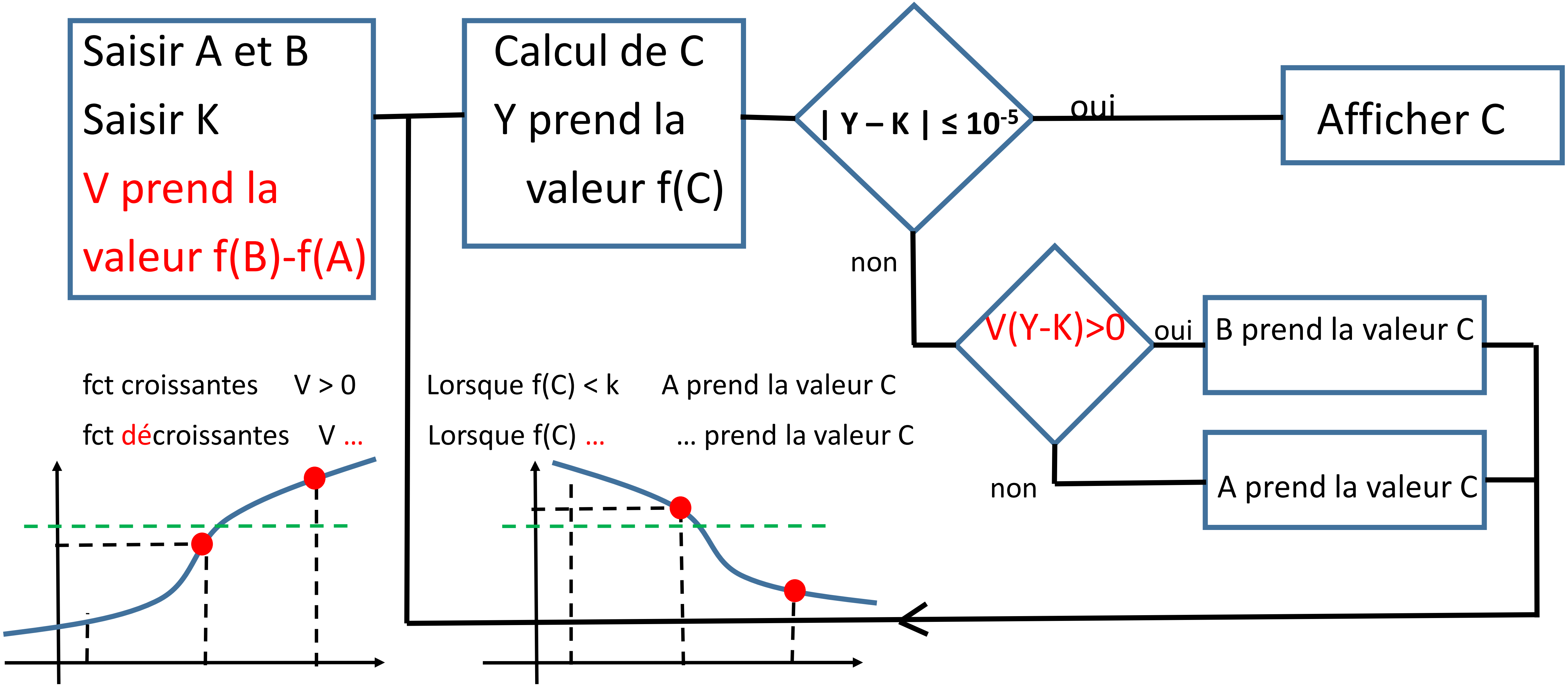
Organigramme convenant aussi pour les monotones décroissantes :



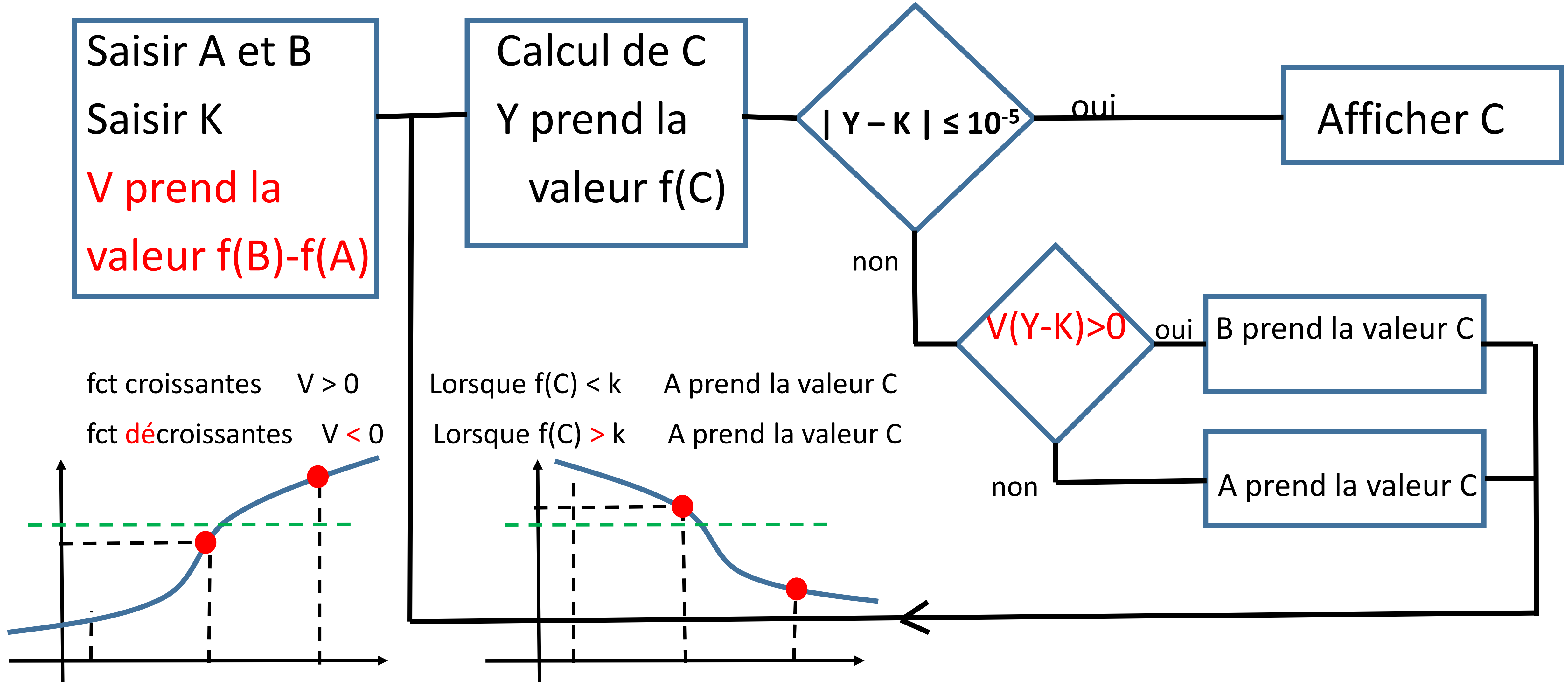
Organigramme convenant aussi pour les monotones décroissantes :



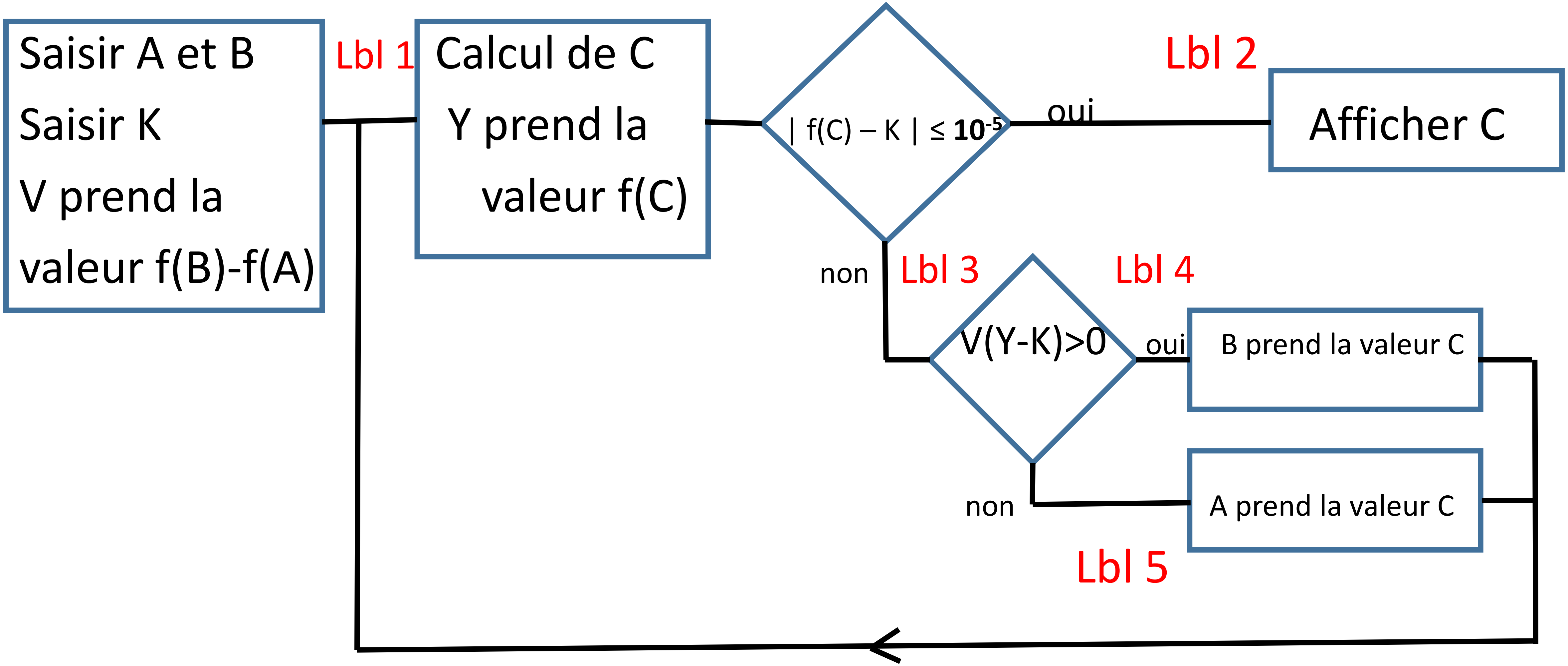
Organigramme convenant aussi pour les monotones décroissantes :



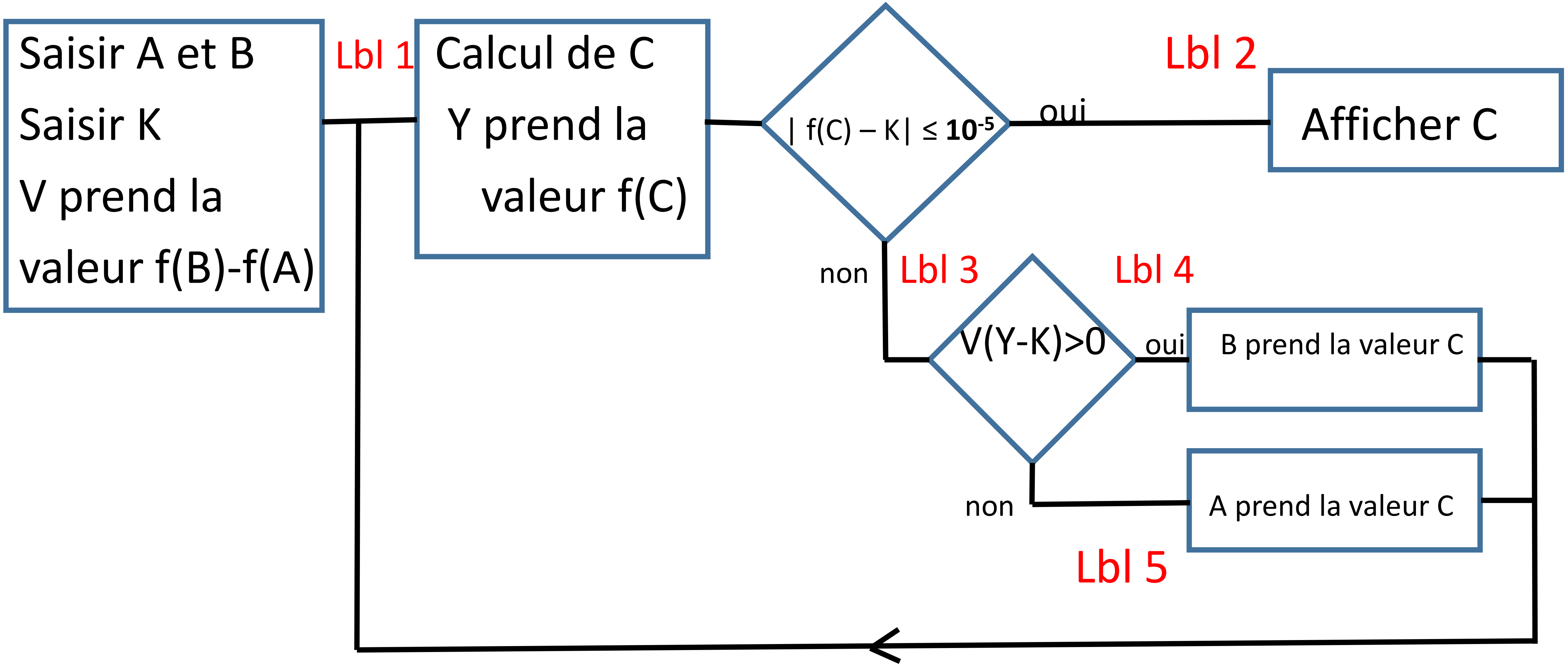
Organigramme convenant aussi pour les monotones décroissantes :



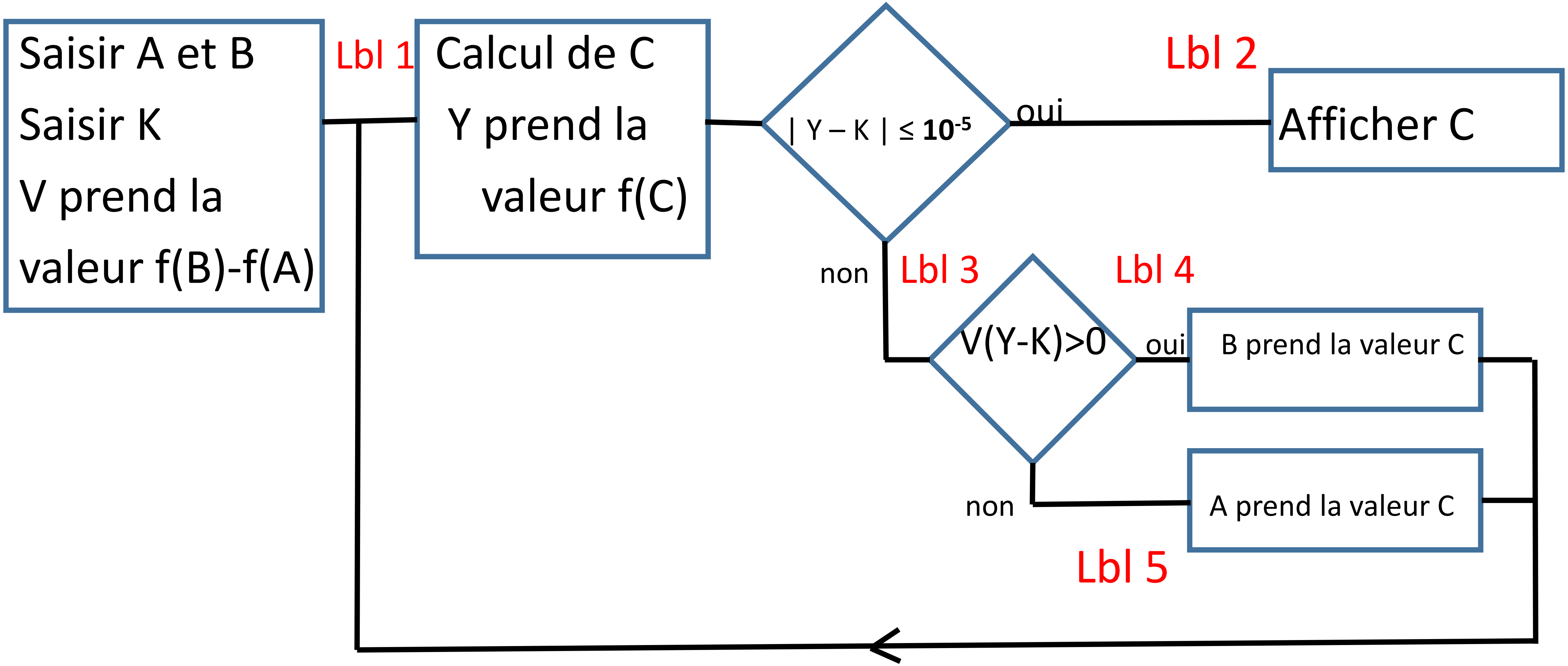
Programme :


Saisir A et B
Saisir K
V prend la
valeur f(B)-f(A)
Lbl 1
Calcul de C
Y prend la
valeur f(C)
| f(C) – K | ≤ 10-5
oui
Lbl 2
Afficher C
non
Lbl 3
Lbl 4
V(Y-K)>0
oui
B prend la valeur C
non
A prend la valeur C
Lbl 5

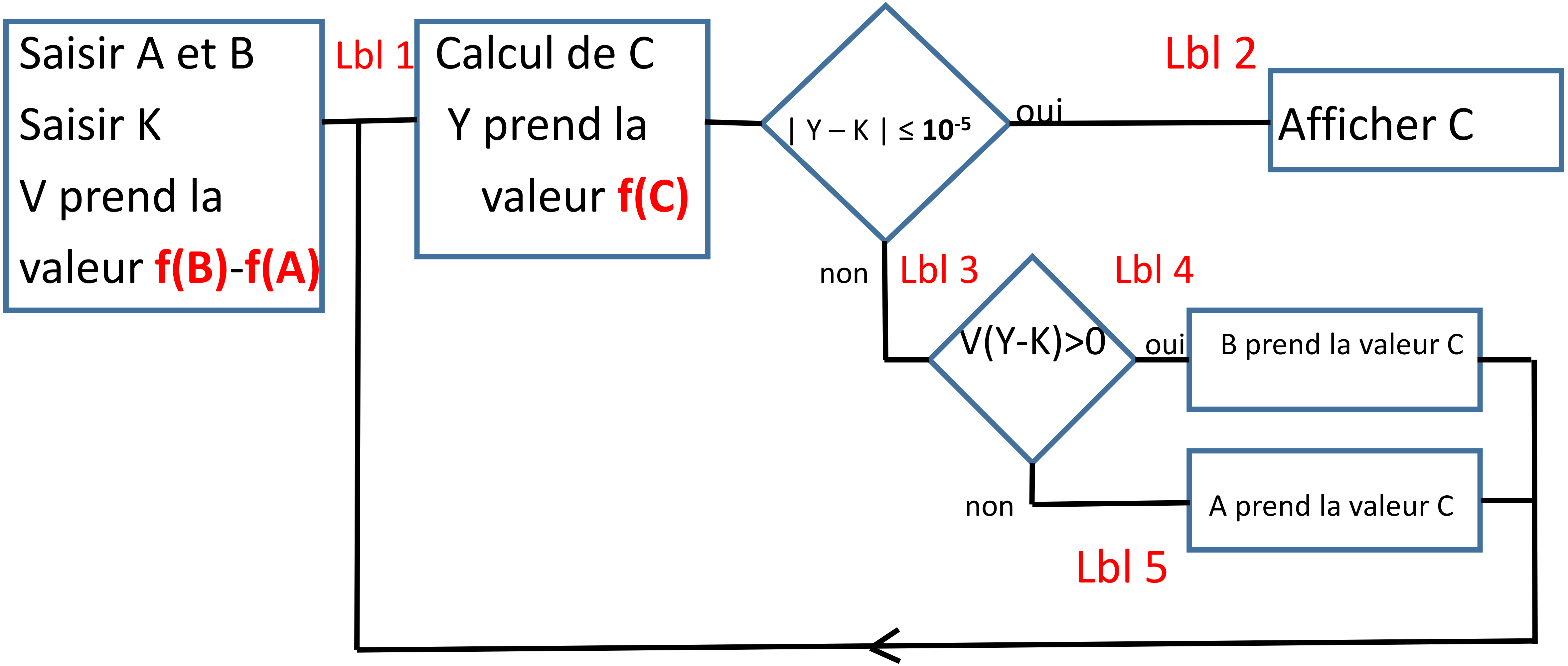
? → A : ? → B : ? → K : B² – A² → V : Lbl 1 : (A + B) ÷ 2 → C : C² → Y : If Abs (Y – K) ≤ 10^{-5} : Then Goto 2 : Else Goto 3 : Lbl 3 : If V (Y – K) > 0 : Then Goto 4 : Else Goto 5 : Lbl 4 : C → B : Goto 1 : Lbl 5 : C → A : Goto 1 : Lbl 2 : C ⊿



Si la fonction f n'est pas la fct x^2, mais la fct $x^2+3x-124+\cos(\sin(3\pi+5x))$ nous avons un inconvénient : celui …

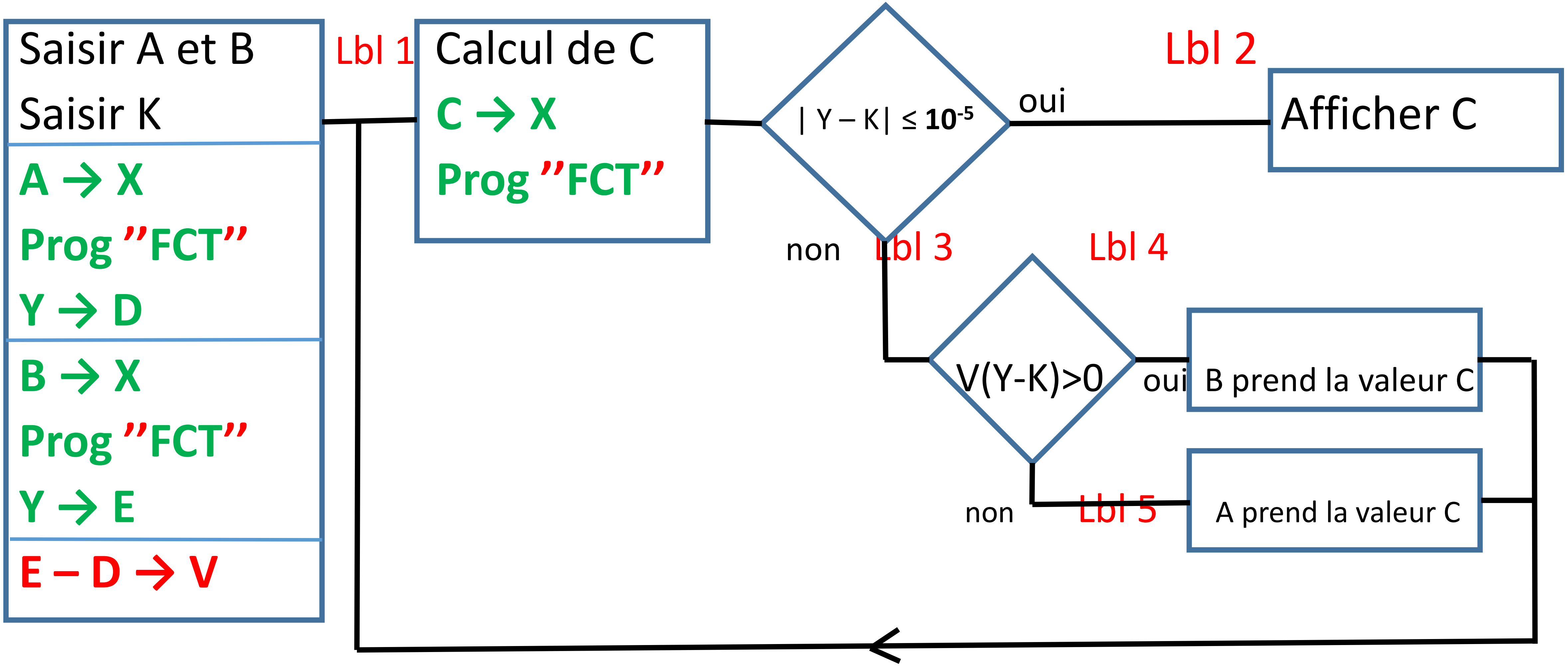


Si la fonction f n'est pas la fct x^2, mais la fct $x^2+3x-124+\cos(\sin(3\pi+5x))$ nous avons un inconvénient : celui de devoir taper 3 fois l'expression f(x) !
Comment éliminer cet inconvénient ?



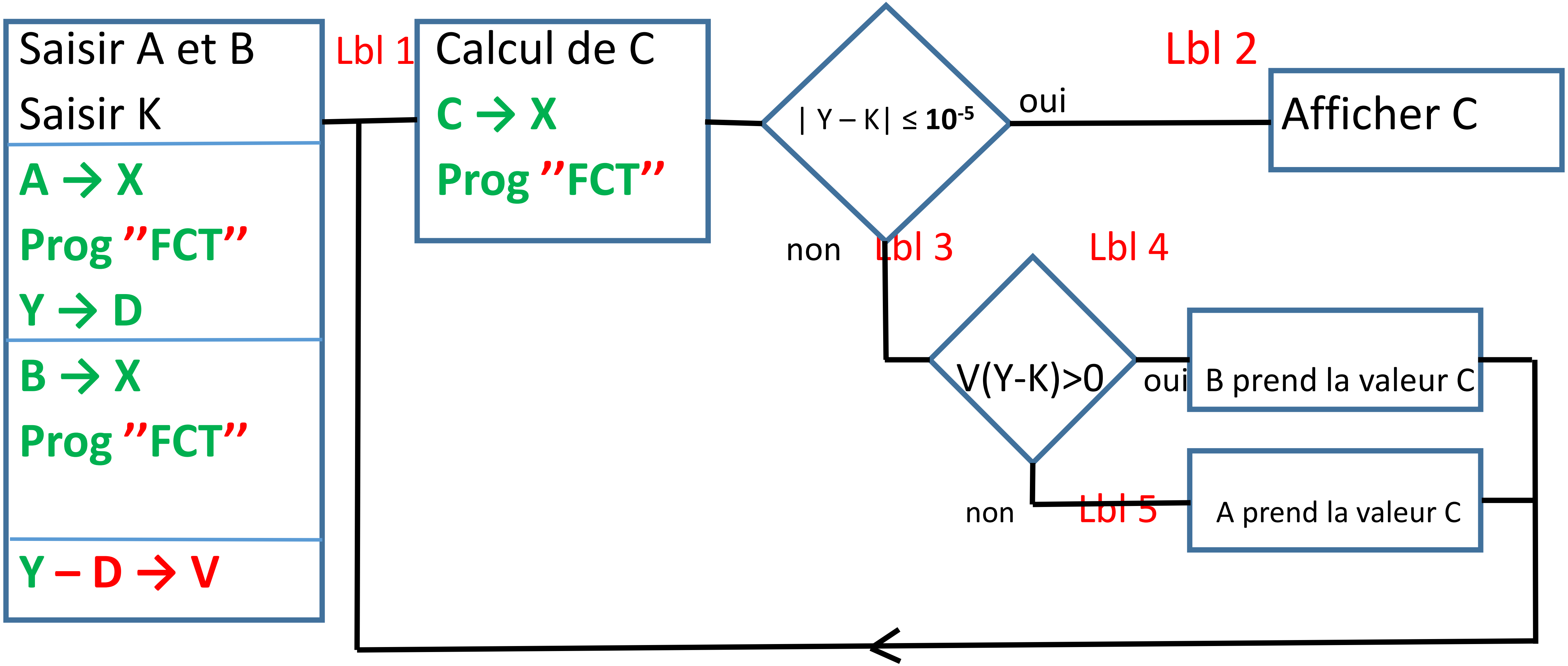
Si la fonction f n’est pas la fct x^2, mais la fct $x^2+3x-124+\cos(\sin(3\pi+5x))$ nous avons un inconvénient : celui de devoir taper 3 fois l’expression f(x) !
Comment éliminer cet inconvénient ? En utilisant 3 fois un seul sous-pgm f(x) que je nomme FCT.

Prog se trouve dans Shift Pgm → CTL.



Variante :

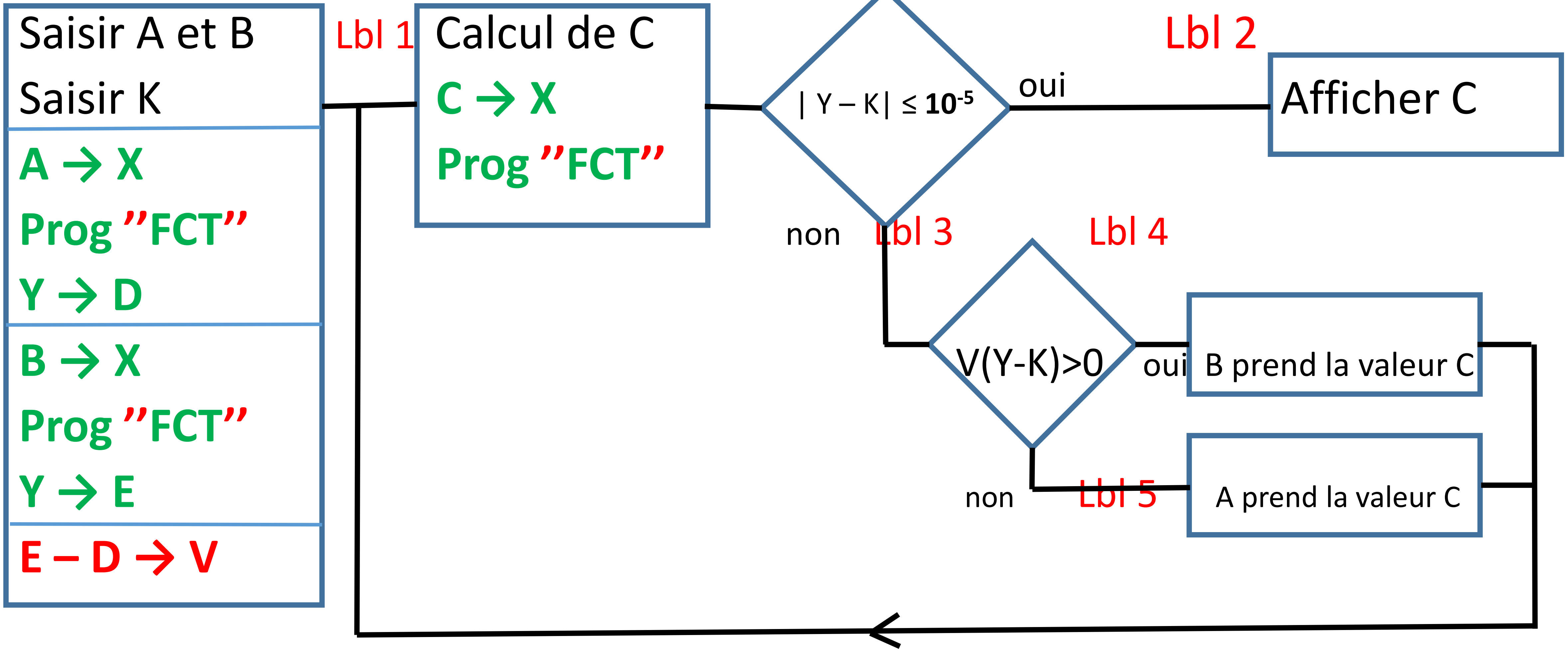
on peut économiser l’écriture de Y → E



? → A : ? → B : ? → K : A → X : Prog ''FCT'' : Y → D : B → X : Prog ''FCT'' : Y → E : E – D → V : Lbl 1 : (A+B)/2 → C : C → X : Prog ''FCT'' : If Abs(Y – K) ≤ 10^{-5} : Then Goto 2 : Else Goto 3 : Lbl 3 : If V(Y-K) > 0 : Then Goto 4 : Else Goto 5 : Lbl 4 : C → B : Goto 1 : Lbl 5 : C → A : Goto 1 : Lbl 2 : C ◢

Et pour le programme FCT : X^2 → Y

Prog se trouve dans Shift Pgm → CTL.



On crée donc un 1er programme DICHOTO :

? → A : ? → B : ? → K : **A → X : Prog ''FCT'' : Y → D : B → X : Prog ''FCT'' : Y → E : E – D → V** : Lbl 1 : (A+B)/2 → C : **C → X : Prog ''FCT''** : If Abs(Y – K) ≤ $\mathbf{10^{-5}}$: Then Goto 2 : Else Goto 3 : Lbl 3 : If V(Y-K) > 0 : Then Goto 4 : Else Goto 5 : Lbl 4 : C → B : Goto 1 : Lbl 5 : C → A : Goto 1 : Lbl 2 : C ⊿

Prog se trouve dans Shift Pgm puis CTL.

Abs se trouve dans OPTN puis NUM.

Et un 2ème programme FCT : X^2 → Y

(si $f(x) = x^2$! Par ex. si $f(x) = 3x + 2$ on tape 3X + 2 → Y)

Application : déterminez les solutions approchées (avec 10 chiffres) des équations suivantes sur les intervalles, et concluez :

$x^2 = 4$ sur [0 ; 6]

$x^2 = 4$ sur [- 6 ; 0]

$x^2 = 2$ sur [0 ; 3]

$x^2 = 3$ sur [1 ; 5]

$x^2 = 9$ sur [0 ; 6]

$x^2 = 9$ sur [- 4 ; - 1]

Application : déterminez les solutions approchées (avec 10 chiffres) des équations suivantes sur les intervalles, et concluez :

$x^2 = 4$ sur [0 ; 6] $x \approx 1{,}999998093$

$x^2 = 4$ sur [- 6 ; 0] $x \approx -1{,}999998093$

$x^2 = 2$ sur [0 ; 3] $x \approx 1{,}414215088$

$x^2 = 3$ sur [1 ; 5] $x \approx 1{,}732048035$

$x^2 = 9$ sur [0 ; 6] $x \approx 3$

$x^2 = 9$ sur [- 4 ; - 1] $x \approx -3{,}000000954$

Application : déterminez les solutions approchées (avec 10 chiffres) des équations suivantes sur les intervalles, et concluez :

$x^2 = 4$ sur $[0 ; 6]$ $\quad x \approx 1{,}999998093$ au lieu de $x = 2$

$x^2 = 4$ sur $[-6 ; 0]$ $\quad x \approx -1{,}999998093$ $\quad x = -2$

$x^2 = 2$ sur $[0 ; 3]$ $\quad x \approx 1{,}414215088$ $\quad x = \sqrt{2}$

$x^2 = 3$ sur $[1 ; 5]$ $\quad x \approx 1{,}732048035$ $\quad x = \sqrt{3}$

$x^2 = 9$ sur $[0 ; 6]$ $\quad x \approx 3$ $\quad x = 3$

$x^2 = 9$ sur $[-4 ; -1]$ $\quad x \approx -3{,}000000954$ $\quad x = -3$

Application : déterminez les solutions approchées (avec 10 chiffres) des équations suivantes sur les intervalles, et concluez :

$x^2 = 4$ sur [0 ; 6] $x \approx 1{,}999998093$ au lieu de $x = 2$

$x^2 = 4$ sur [- 6 ; 0] $x \approx -1{,}999998093$ $x = -2$

$x^2 = 2$ sur [0 ; 3] $x \approx 1{,}414215088$ $x = \sqrt{2}$

$x^2 = 3$ sur [1 ; 5] $x \approx 1{,}732048035$ $x = \sqrt{3}$

$x^2 = 9$ sur [0 ; 6] $x \approx 3$ le 1er milieu C donne f(3) = 9 $x = 3$

$x^2 = 9$ sur [- 4 ; - 1] $x \approx -3{,}000000954$ $x = -3$