Exercice 4 : Soit la fonction f

définie sur $[\ 3\pi\ ;\ 4\pi\ ]$

par $f(x) = x + 2\sin x - 10$

1°) Déterminez ses sens de variation.

2°) Déterminez ses signes.

3°) Déterminez ses extremums.

1°) Sens de variation :

$f(x) = x + 2 \sin x - 10$

$f'(x) = (x - 30 + 2 \sin x)'$

D'après le tableau des dérivées :

$(u + v)' = u' + v'$ et $(k u)' = k u'$

⇒ $f'(x) = (x - 10)' + 2 (\sin x)'$

et $(1x - 10)' = (ax + b)' = a = 1$

$(\sin x)' = \cos x$

⇒ $f'(x) = 1 + 2 \times \cos x = 1 + 2 \cos x$

$f'(x) = 1 + 2\cos x$

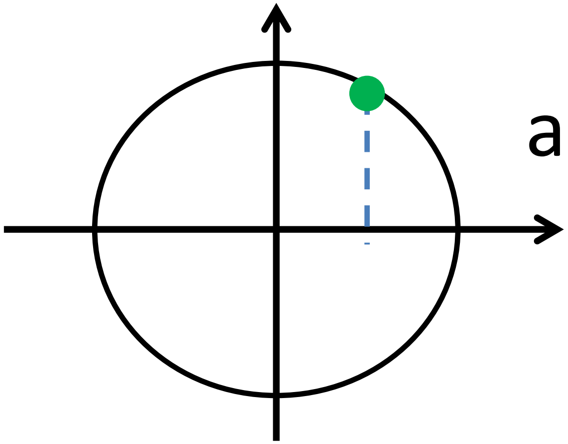
$f'(x) = 0 \iff 1 + 2\cos x = 0$

$\iff 2\cos x = -1 \iff \cos x = -\frac{1}{2}$

$f'(x) = 1 + 2\cos x$

$f'(x) = 0 \iff 1 + 2\cos x = 0$

$\iff 2\cos x = -1 \iff \cos x = -½$

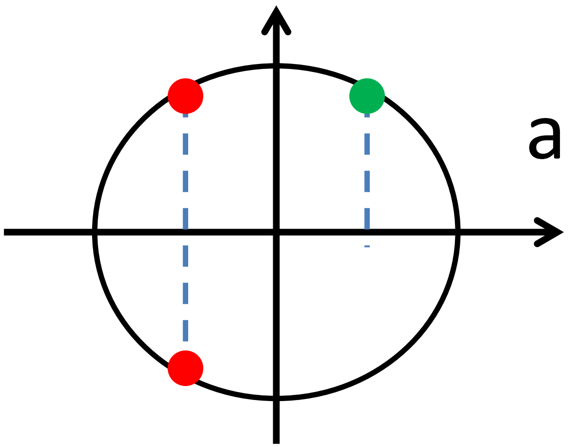


angle remarquable $\cos \pi/3 = ½$

$f'(x) = 1 + 2\cos x$

$f'(x) = 0 \iff 1 + 2\cos x = 0$

$\iff 2\cos x = -1 \iff \cos x = -\frac{1}{2}$



angle remarquable $\cos \pi/3 = \frac{1}{2}$

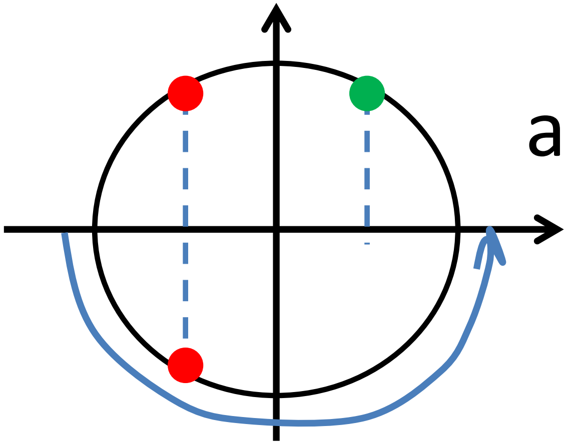
solutions $x_1 = 2\pi/3 + k2\pi$

$x_2 = 4\pi/3 + k2\pi$

$f'(x) = 1 + 2\cos x$

$f'(x) = 0 \iff 1 + 2\cos x = 0$

$\iff 2\cos x = -1 \iff \cos x = -\frac{1}{2}$



angle remarquable $\cos \pi/3 = \frac{1}{2}$

solutions $x_1 = 2\pi/3 + k2\pi$

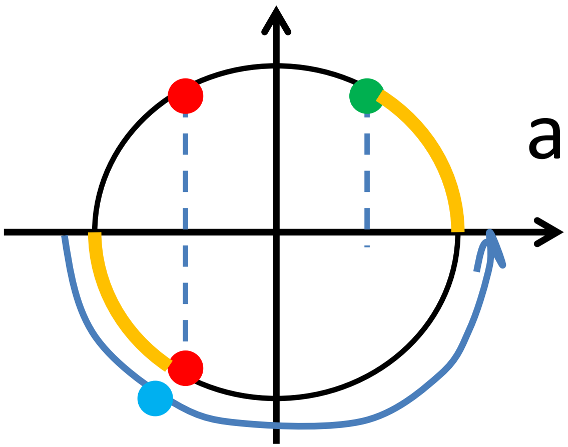
$x_2 = 4\pi/3 + k2\pi$

Dans $[\,3\pi\,;\,4\pi\,]$ solutions … ?

$f'(x) = 1 + 2\cos x$

$f'(x) = 0 \iff 1 + 2\cos x = 0$

$\iff 2\cos x = -1 \iff \cos x = -\frac{1}{2}$



angle remarquable $\cos \pi/3 = \frac{1}{2}$

solutions $x_1 = 2\pi/3 + k2\pi$

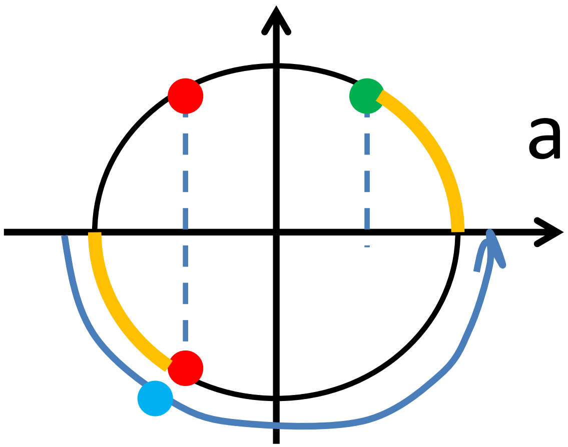
$x_2 = 4\pi/3 + k2\pi$

Dans $[\,3\pi\,;\,4\pi\,]$ solution $3\pi + \pi/3 = 10\pi/3$

$f'(x) = 1 + 2\cos x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\cos x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$



angle remarquable $\cos \pi/3 = \frac{1}{2}$

solutions $x_1 = 2\pi/3 + k2\pi$

$x_2 = 4\pi/3 + k2\pi$

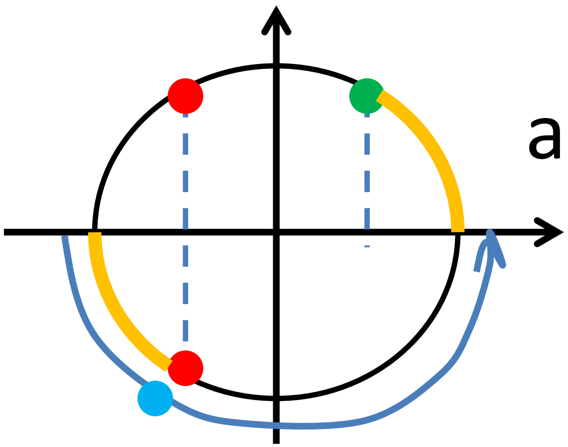
Dans $[\, 3\pi \,;\, 4\pi \,]$ solution $3\pi + \pi/3 = 10\pi/3$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow$ … ?

$f'(x) = 1 + 2\cos x$

$f'(x) = 0 \iff 1 + 2\cos x = 0$

$\iff 2\cos x = -1 \iff \cos x = -\frac{1}{2}$



angle remarquable $\cos \pi/3 = \frac{1}{2}$

solutions $x_1 = 2\pi/3 + k2\pi$

$x_2 = 4\pi/3 + k2\pi$

Dans [3π ; 4π] solution $3\pi + \pi/3 = 10\pi/3$

$f'(x) < 0 \iff 3 + 6\cos x < 0$

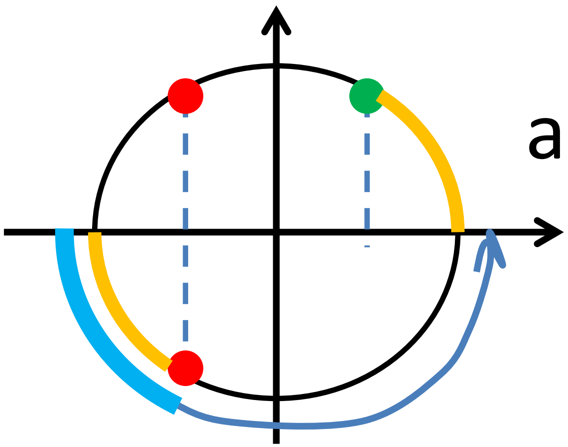
$\iff 6\cos x < -3 \iff \cos x < -\frac{1}{2}$

$\iff$ x est dans … ?

$f'(x) = 1 + 2\cos x$

$f'(x) = 0 \iff 1 + 2\cos x = 0$

$\iff 2\cos x = -1 \iff \cos x = -\frac{1}{2}$



angle remarquable $\cos \pi/3 = \frac{1}{2}$

solutions $x_1 = 2\pi/3 + k2\pi$

$x_2 = 4\pi/3 + k2\pi$

Dans $[\,3\pi\,;\,4\pi\,]$ solution $3\pi + \pi/3 = 10\pi/3$

$f'(x) < 0 \iff 3 + 6\cos x < 0$

$\iff 6\cos x < -3 \iff \cos x < -\frac{1}{2}$

$\iff$ x est dans $[\,3\pi\,;\,10\pi/3\,[$

1°) Sens de variations de f.

Résumé de l'étude :

$f(x) = x + 2 \sin x - 10$

$f'(x) = 1 + 2 \cos x$

x	
f '(x)	
f(x)	

1°) Sens de variations de f.

f(x) = x + 2 sin x – 10

f ‘(x) = 1 + 2 cos x

x	3π		10π/3		4π
f ‘(x)		–	0		
f(x)					

f ‘(x) = 0 pour x = 10π/3

f ‘(x) < 0 pour x dans [3π ; 10π/3 [

1°) Sens de variations de f.

$f(x) = x + 2 \sin x - 10$

$f'(x) = 1 + 2 \cos x$

x	3π		$10\pi/3$		4π
f '(x)		–	0	+	
f(x)					

$f'(x) = 0$ pour $x = 10\pi/3$

$f'(x) < 0$ pour x dans $[\, 3\pi \,;\, 10\pi/3 \,[$

1°) Sens de variations de f.

$f(x) = x + 2 \sin x - 10$

$f'(x) = 1 + 2 \cos x$

x	3π		$10\pi/3$		4π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

grâce au théorème de la monotonie

2°) Signes de f. $f(x) = x + 2 \sin x - 10$

Impossible de résoudre algébriquement

$$f(x) = 0 \qquad f(x) < 0 \qquad f(x) > 0$$

car on ne peut rassembler les deux x :

$$x + 2 \sin x - 10 = 0$$

Il faut alors utiliser le tableau de variation :

x	3π		$10\pi/3$		4π
f(x)		↘		↗	

2°) Signes de f. $f(x) = x + 2\sin x - 10$

Impossible de résoudre algébriquement

$$f(x) = 0 \qquad f(x) < 0 \qquad f(x) > 0$$

car on ne peut rassembler les deux x :

$$x + 2\sin x - 10 = 0$$

Il faut alors utiliser le tableau de variation :

x	3π		$10\pi/3$		4π
$f(x)$	$\approx -0{,}58$	↘	$\approx -1{,}26$	↗	$\approx 2{,}57$

2°) Signes de f. $f(x) = x + 2\sin x - 10$

Impossible de résoudre algébriquement

$f(x) = 0$ $f(x) < 0$ $f(x) > 0$

x	3π		$10\pi/3$		4π
$f(x)$	≈ - 0,58	↘	≈ - 1,26	↗	≈ 2,57

2°) Signes de f. $f(x) = x + 2 \sin x - 10$

Impossible de résoudre algébriquement

f(x) = 0 f(x) < 0 f(x) > 0

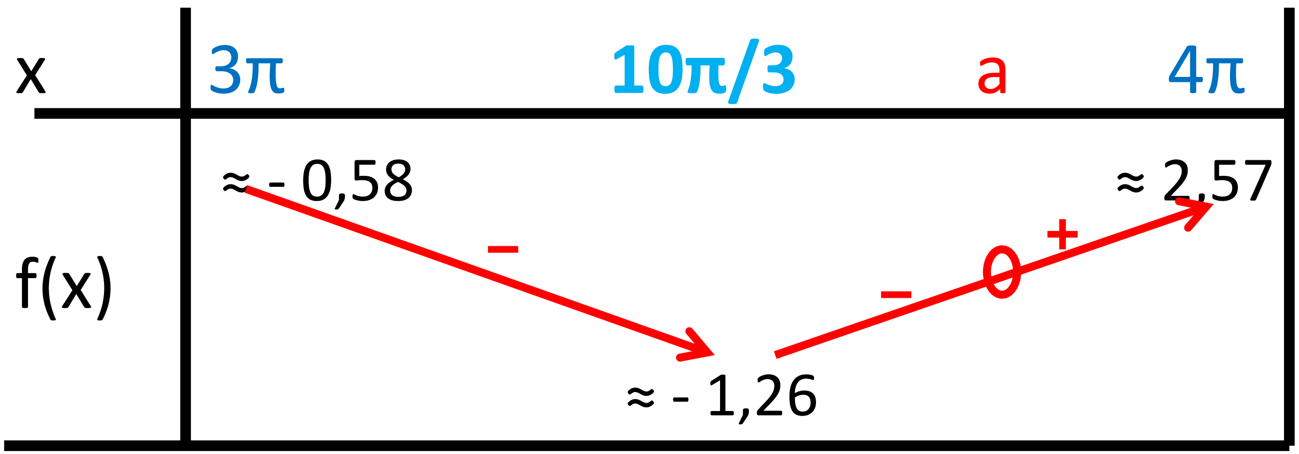
x	3π		$10\pi/3$		4π
f(x)	≈ - 0,58	↘ −	≈ - 1,26	↗	≈ 2,57

Sur [$10\pi/3$; 4π] f(x) < 0 car $-1,26 \leq f(x) \leq -0,58$

2°) Signes de f. $f(x) = x + 2 \sin x - 10$

Impossible de résoudre algébriquement

$f(x) = 0$ $\quad$ $f(x) < 0$ $\quad$ $f(x) > 0$



Sur [10π/3 ; 4π] $\quad f(x) < 0 \quad$ car $\quad -1,26 \leq f(x) \leq -0,58$

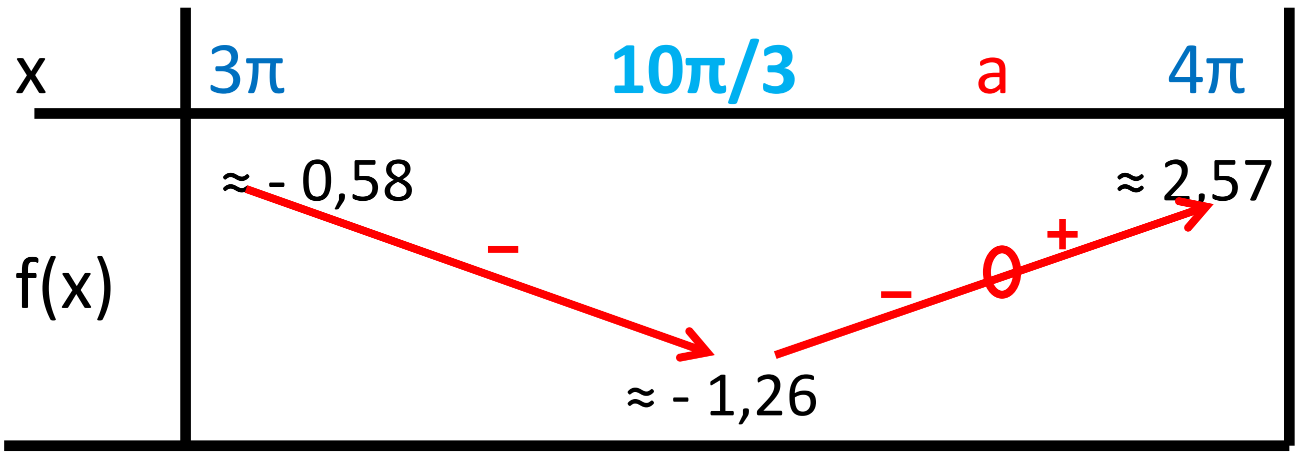
Sur [10π/3 ; 4π] il existe un unique a tel que $\quad f(a) = 0$

Sur [10π/3 ; a [$\quad f(x) < 0 \qquad$ Sur] a ; 4π] $\quad f(x) > 0$

2°) Signes de f. $f(x) = x + 2 \sin x - 10$

Impossible de résoudre algébriquement

$f(x) = 0$ $f(x) < 0$ $f(x) > 0$



Sur [10π/3 ; 4π] $f(x) < 0$ car $-1{,}26 \leq f(x) \leq -0{,}58$

Sur [10π/3 ; 4π] il existe un unique a tel que $f(a) = 0$

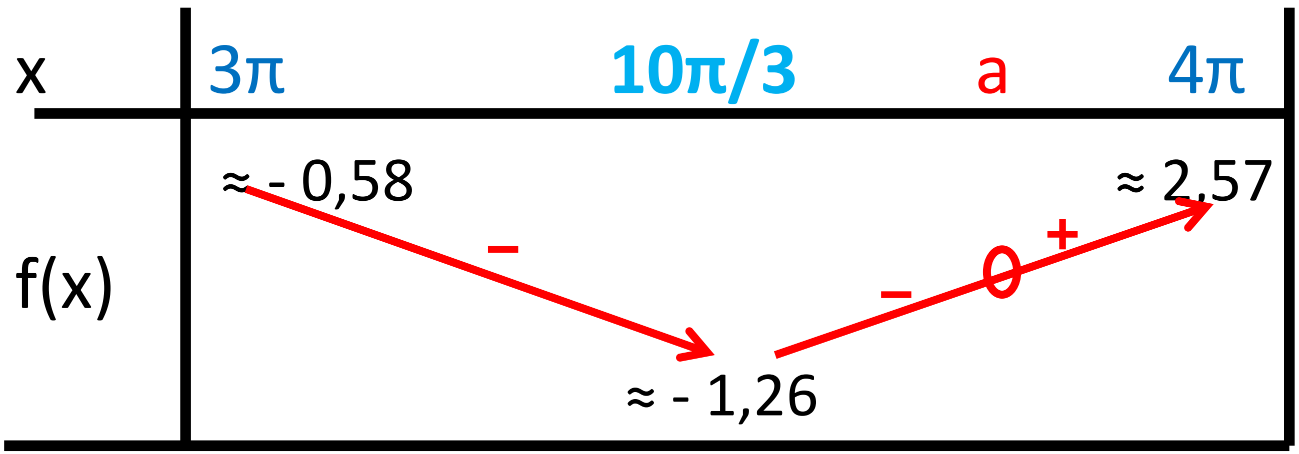
Sur [10π/3 ; a [$f(x) < 0$ Sur] a ; 4π] $f(x) > 0$

Impossible de résoudre $f(a) = 0$: on recherche à la calculatrice, on trouve $a \approx 11{,}6212 \approx 3{,}699\pi$

2°) Signes de f. $f(x) = x + 2 \sin x - 10$

Impossible de résoudre algébriquement

$f(x) = 0$ $f(x) < 0$ $f(x) > 0$



Réponse :

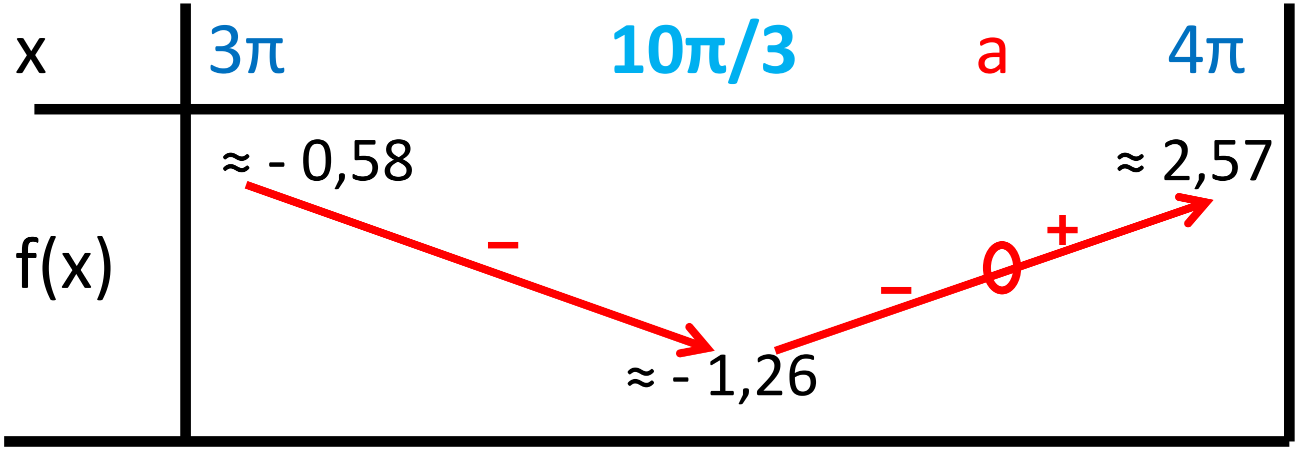
x	3π		a		4π
f(x)		-	0	+	

$a \approx 11,6212$

3°) Extremums de f. $f(x) = x + 2 \sin x - 10$

Impossible de les déterminer algébriquement

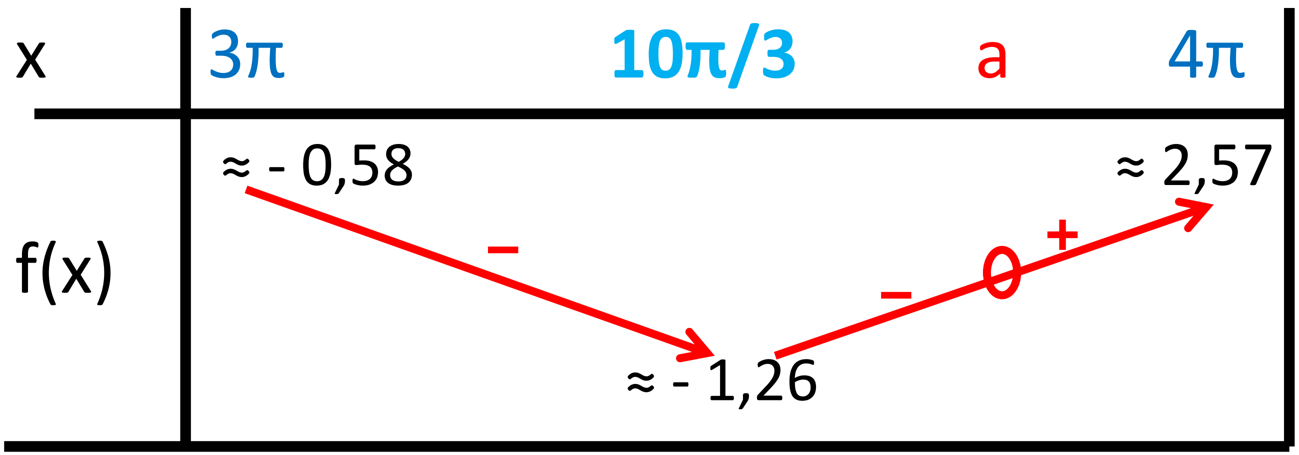
Il faut alors utiliser le tableau de variation :

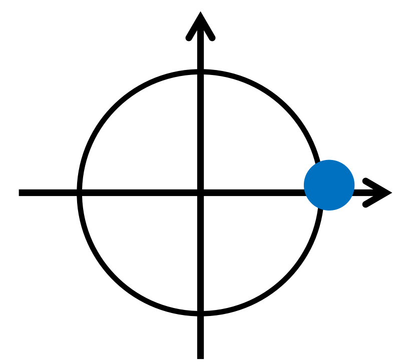


3°) Extremums de f. $f(x) = x + 2 \sin x - 10$

Impossible de les déterminer algébriquement

Il faut alors utiliser le tableau de variation :





$-0,58 < 2,57$ ⇒ Maximum $f(4\pi)$

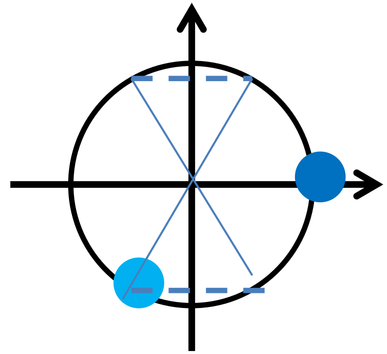
$f(4\pi) = 4\pi + 2 \sin 4\pi - 10 = 4\pi + 2(0) - 10 =$ $\mathbf{4\pi - 10}$

3°) Extremums de f. $f(x) = x + 2 \sin x - 10$

Impossible de les déterminer algébriquement

Il faut alors utiliser le tableau de variation :

x	3π		$10\pi/3$		a		4π
f(x)	≈ - 0,58	− ↘	≈ - 1,26	− ↗	0	+ ↗	≈ 2,57



-0,58 < 2,57 ⇨ **Maximum** $f(4\pi)$

$f(4\pi) = 4\pi + 2 \sin 4\pi - 10 = 4\pi + 2(0) - 10 = \mathbf{4\pi - 10}$

Minimum $f(10\pi/3) = 10\pi/3 + 2 \sin 10\pi/3 - 10$

$= 10\pi/3 + 2(-(\sqrt{3})/2) - 10 = \mathbf{10\pi/3 - \sqrt{3} - 10}$