Exercice 6 :

Soient les points

$A(1 ; 3)$, $B(2 ; 7)$,

$C(5 ; 2)$ et $D(-3 ; 4)$

dans un repère orthonormé.

Les droites (AB) et (CD) sont-elles orthogonales ?

Exo 6 : A(1 ; 3), B(2 ; 7), C(5 ; 2) et D(- 3 ; 4)

$\overrightarrow{AB} = (1 ; 4)$ $\overrightarrow{CD} = (- 8 ; 2)$

Le repère est orthonormé donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y'$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 1(- 8) + 4(2) = - 8 + 8 = 0$

Exo 6 : A(1 ; 3), B(2 ; 7), C(5 ; 2) et D(- 3 ; 4)

$\overrightarrow{AB} = (1 ; 4)$ $\qquad\qquad$ $\overrightarrow{CD} = (- 8 ; 2)$

Le repère est orthonormé donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = x\,x' + y\,y'$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 1(-8) + 4(2) = -8 + 8 = 0$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \times CD \times \cos \beta$

$\Longleftrightarrow \quad 0 = AB \times CD \times \cos \beta$

Exo 6 : A(1 ; 3), B(2 ; 7), C(5 ; 2) et D(- 3 ; 4)

$\overrightarrow{AB} = (1 ; 4)$ $\overrightarrow{CD} = (- 8 ; 2)$

Le repère est orthonormé donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y'$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 1(-8) + 4(2) = -8 + 8 = 0$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \times CD \times \cos \beta$

$\Longleftrightarrow \quad 0 = AB \times CD \times \cos \beta$

$\Longleftrightarrow \quad \cos \beta = 0$ puisque $AB \neq 0$ et $CD \neq 0$

$\Longleftrightarrow \quad \beta = \pi/2$ radian

$\Longleftrightarrow$ (AB) et (CD) sont orthogonales.

Exercice 7

Soient les points A(1 ; 5), B(3 ; - 7)

et C(- 2 ; 4) dans un repère orthonormé.

Déterminez à 0,01 degrés près

l'angle ($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$).

$A(1 ; 5)$, $B(3 ; -7)$ et $C(-2 ; 4)$

$\overrightarrow{AB}(2 ; -12)$ et $\overrightarrow{AC}(-3 ; -1)$.

Le repère est orthonormé

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = x x' + y y' = 2(-3) + (-12)(-1) = 6$

$$A(1\,;\,5),\ B(3\,;\,-7) \text{ et } C(-2\,;\,4)$$

$\overrightarrow{AB}(2\,;\,-12)$ et $\overrightarrow{AC}(-3\,;\,-1)$.

Le repère est orthonormé

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = x\,x' + y\,y' = 2\,(-3) + (-12)\,(-1) = 6$

et $AB = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + (-12)^2} = \sqrt{148}$

idem $AC = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \beta$

A(1 ; 5), B(3 ; - 7) et C(- 2 ; 4)

$\overrightarrow{AB}(2 ; - 12)$ et $\overrightarrow{AC}(- 3 ; - 1)$.

Le repère est orthonormé

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = x\,x' + y\,y' = 2\,(-3) + (-12)\,(-1) = 6$$

et $AB = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + (-12)^2} = \sqrt{148}$

idem $AC = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\beta$$

$$\Rightarrow \cos\beta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{6}{\sqrt{148} \times \sqrt{10}}$$

$A(1\,;5),\ B(3\,;-7)$ et $C(-2\,;4)$

$\overrightarrow{AB}(2\,;-12)$ et $\overrightarrow{AC}(-3\,;-1)$.

Le repère est orthonormé

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = x\,x' + y\,y' = 2\,(-3) + (-12)\,(-1) = 6$

et $AB = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + (-12)^2} = \sqrt{148}$

idem $AC = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\beta$

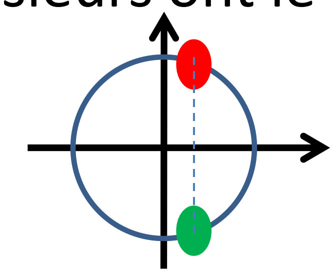
$\Rightarrow$ $\cos\beta = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \dfrac{6}{\sqrt{148} \times \sqrt{10}}$ qui ne correspond pas à un angle remarquable

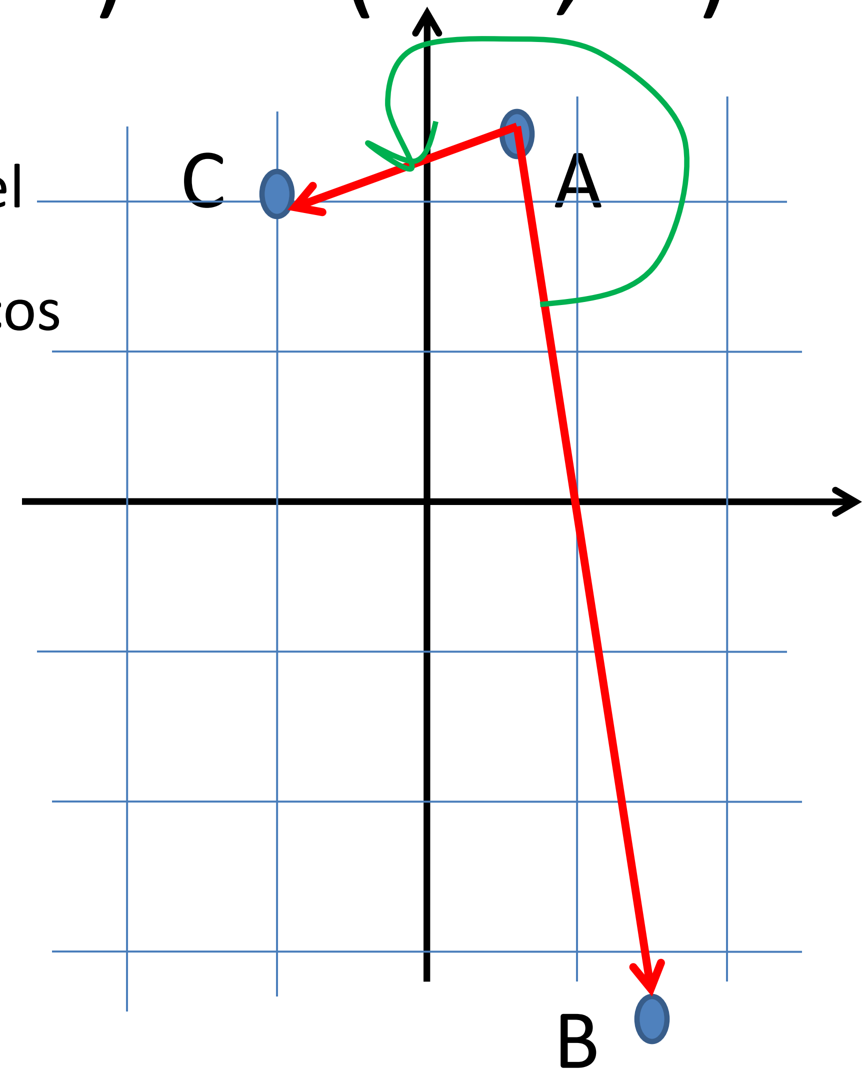
$\Rightarrow$ calculatrice $\beta = \text{Arc}\cos\left(6 / (\sqrt{148} \times \sqrt{10})\right) \approx 81{,}0°$

A(1 ; 5), B(3 ; - 7) et C(- 2 ; 4)

la calculatrice ne donne qu'un réel

alors que plusieurs ont le même cos





donc **$(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC})$**

$\approx 360 - 81{,}0$

$=$ **279,0°**

en suivant le sens trigo.

Exercice 7 bis

Soient les points A(2 ; 1), B(5 ; 1), C(- 3 ; 0) et D(0 ; - 3) dans un repère orthonormé.

Déterminez
l'angle ($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CD}$).

A(2 ; 1), B(5 ; 1), C(0 ; - 3) et D(- 3 ; 0)

$\overrightarrow{AB}$(3 ; 0) et $\overrightarrow{CD}$(- 3 ; 3).

Le repère est orthonormé

⇨ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = x\,x' + y\,y' = 3\,(-3) + 0\,(3) = -9$

$A(2 ; 1)$, $B(5 ; 1)$, $C(0 ; -3)$ et $D(-3 ; 0)$

$\overrightarrow{AB}(3 ; 0)$ et $\overrightarrow{CD}(-3 ; 3)$.

Le repère est orthonormé

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = x x' + y y' = 3(-3) + 0(3) = -9$

et $AB = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$

idem $CD = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \times CD \times \cos \beta$

$A(2\,;1)$, $B(5\,;1)$, $C(0\,;-3)$ et $D(-3\,;0)$

$\overrightarrow{AB}(3\,;0)$ et $\overrightarrow{CD}(-3\,;3)$.

Le repère est orthonormé

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = x\,x' + y\,y' = 3\,(-3) + 0\,(3) = -9$$

et $\quad AB = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$

idem $\quad CD = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = \sqrt{9\times 2} = 3\sqrt{2}$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = AB \times CD \times \cos\beta$$

$$\Rightarrow \cos\beta = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{AB\times CD} = \frac{-9}{3\times 3\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$A(2 ; 1), B(5 ; 1), C(0 ; - 3)$ et $D(- 3 ; 0)$

$\overrightarrow{AB}(3 ; 0)$ et $\overrightarrow{CD}(- 3 ; 3)$.

Le repère est orthonormé

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = x\,x' + y\,y' = 3\,(-3) + 0\,(3) = -9$

et $AB = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$

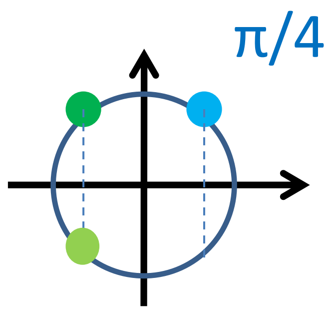
idem $CD = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$

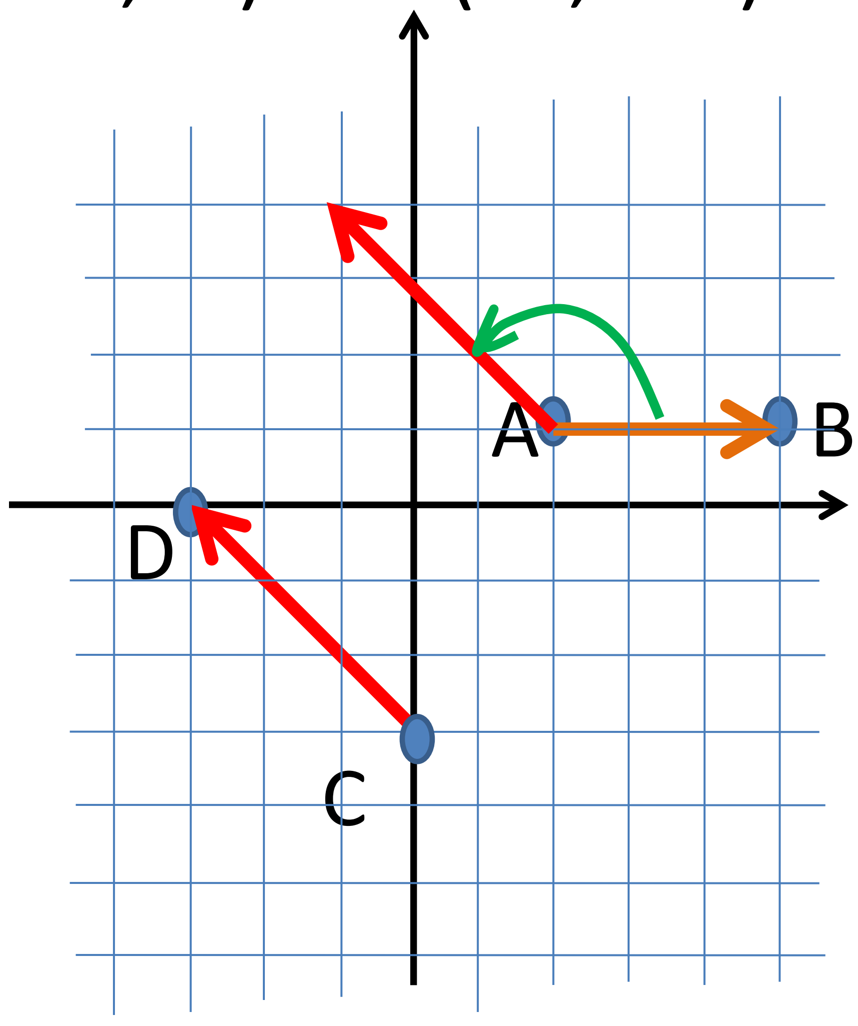
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \times CD \times \cos \beta$

$$\Rightarrow \cos \beta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{AB \times CD} = \frac{-9}{3 \times 3\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

qui correspond à l'angle remarquable $\cos \pi/4 = + \sqrt{2} / 2$

A(2 ; 1), B(5 ; 1), C(- 3 ; 0) et D(0 ; - 3)





donc **($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CD}$)**

$\approx \pi - \pi/4$

$=$ **$3\pi/4$ radian**

en suivant le sens trigo.

Exercice 8 :

1°) Soient le point $A(3 ; 6)$ et la droite d d'équation $y = 4x – 1$ dans un repère orthonormé. Déterminez l'équation de la droite d', parallèle à d et passant par A.

2°) Soient le point $A(2 ; 5)$ et la droite d d'équation $y = (1/3)x + 2$ dans un repère orthonormé. Déterminez l'équation de la droite d', perpendiculaire à d et passant par A.

Quelles différences entre les 2 questions ?

1°) Soient le point $A(3 ; 6)$ et la droite d d'équation $y = 4x - 1$ dans un repère orthonormé. Déterminez l'équation de la droite d', parallèle à d et passant par A.

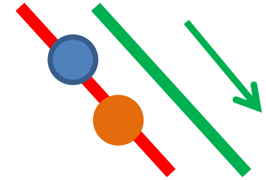
2°) Soient le point $A(2 ; 5)$ et la droite d d'équation $y = (1/3)x + 2$ dans un repère orthonormé. Déterminez l'équation de la droite d', perpendiculaire à d et passant par A.

2 questions identiques sauf pour …

1°) Soient le point $A(3 ; 6)$ et la droite d d'équation $y = 4x – 1$ dans un repère orthonormé. Déterminez l'équation de la droite d', parallèle à d et passant par A.

2°) Soient le point $A(2 ; 5)$ et la droite d d'équation $y = (1/3)x + 2$ dans un repère orthonormé. Déterminez l'équation de la droite d', perpendiculaire à d et passant par A.

Méthode :



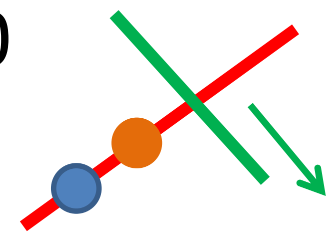
1°) d d'équation $y = 4x + 3$

⇨ coeff. directeur ⇨ vecteur directeur $\vec{u}$

M pt quelconque de d' passant par A

d' *parallèle* à d ⇨ $\overrightarrow{AM}$ *colinéaire* à $\vec{u}$

⇨ $x\,y' - x'\,y = 0$



2°) d d'équation $y = (1/3)x - 1$

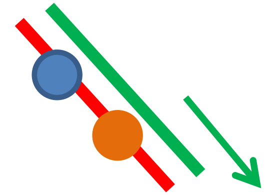
⇨ coeff. directeur ⇨ vecteur directeur $\vec{u}$

M pt quelconque de d' passant par A

d' *perpendiculaire* à d ⇨ $\overrightarrow{AM}$ *orthogonal* à $\vec{u}$

⇨ $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = x\,x' + y\,y' = 0$

1°) A(3 ; 6) et d : $y = 4x + 3$



Soit M(x ; y) un point quelconque de d',

donc représentatif de tous les points de d'.

d a pour coeff.dir. 4

$\Rightarrow$ $\vec{u}$ (1 ; 4) est un vecteur directeur de d.

$\overrightarrow{AM}(x - 3 ; y - 6)$

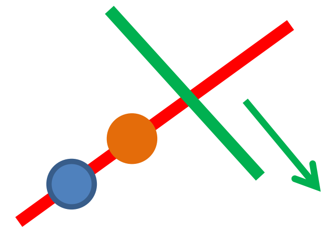
d' // d $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AM}$ *colinéaire* à $\vec{u}$ $\Rightarrow$ $x\,y' - x'\,y = 0$

Donc $(x - 3)\,4 - (y - 6)\,1 = 0$

$\Leftrightarrow$ $4x - 12 - y + 6 = 0$

$\Leftrightarrow$ $y = 4x - 6$

2°) A(2 ; 5) et d : $y = \frac{1}{3}x + 2$



Soit M(x ; y) un point quelconque de d',

donc représentatif de tous les points de d'.

d a pour coeff.dir. $\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ $\vec{u}\,(1 ; \frac{1}{3})$ est un vecteur directeur de d.

$\overrightarrow{AM}(x - 2 ; y - 5)$

d' $\perp$ d $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AM} \perp \vec{u}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$

Le repère est orthonormé $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = x\,x' + y\,y'$

Donc $(x - 2)\,1 + (y - 5)\,\frac{1}{3} = 0$

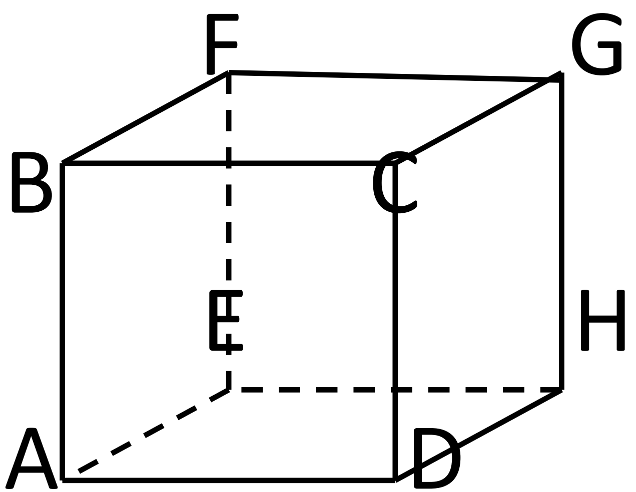
$\Leftrightarrow$ $x - 2 + \frac{1}{3}y - 5/3 = 0$

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{3}y = - x + 11/3$

$\Leftrightarrow$ $y = - 3x + 11$

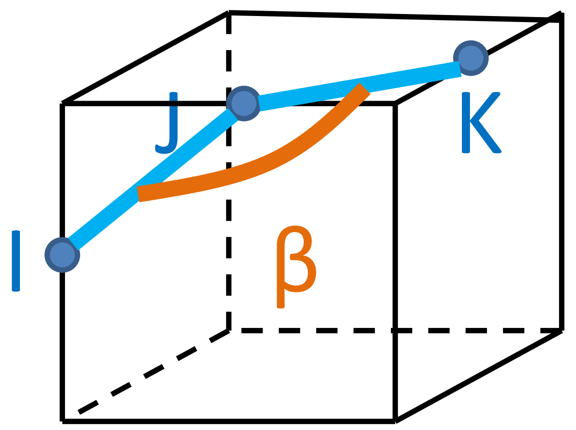
Exercice 10

Soient un cube ABCDEFGH et les milieux respectifs I, J et K de [AB], [BC] et [CG]. Déterminez l'angle $\widehat{IJK}$.



Exercice 10

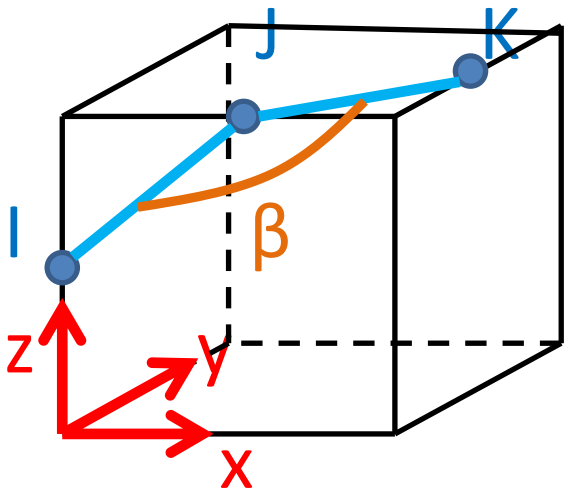
Soient un cube ABCDEFGH et les milieux respectifs I, J et K de [AB], [BC] et [CG]. Déterminez l'angle $\widehat{IJK}$ noté β



Soit le repère orthonormé (A ; x ; y ; z)

I	0	0	a/2
J	a/2	0	a
K	a	a/2	a

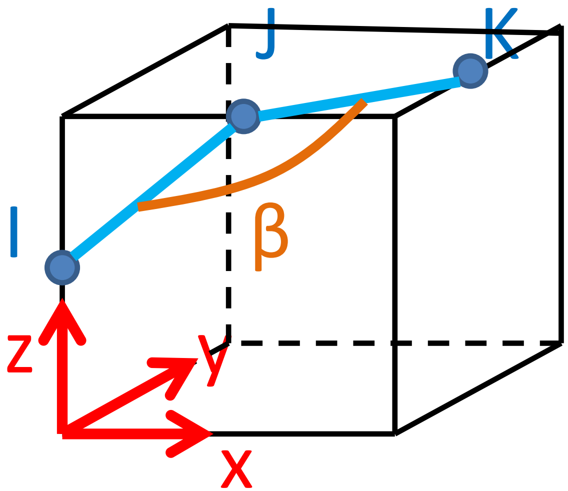
$\overrightarrow{JI}$ (; ;) $\overrightarrow{JK}$ (; ;).



Soit le repère orthonormé (A ; x ; y ; z)

I	**0**	**0**	**a/2**
J	a/2	0	a
K	a	a/2	a

$\overrightarrow{JI}$ (- a/2 ; 0 ; - a/2) $\overrightarrow{JK}$ (a/2 ; a/2 ; 0).



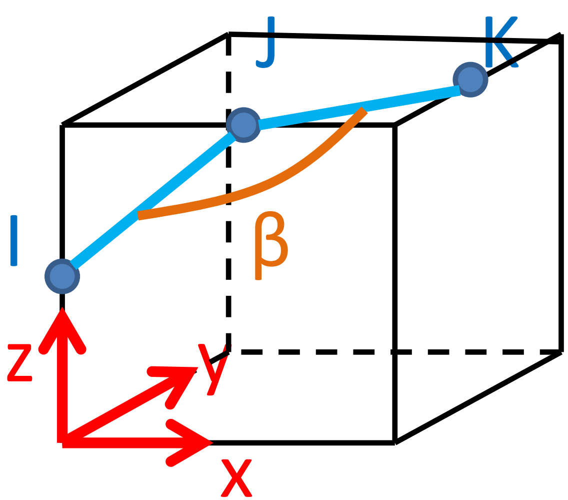
Soit le repère orthonormé (A ; x ; y ; z)

I	0	0	a/2
J	a/2	0	a
K	a	a/2	a

$\overrightarrow{JI}$ (- a/2 ; 0 ; - a/2) $\overrightarrow{JK}$ (a/2 ; a/2 ; 0).

Le repère est orthonormé donc $\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JK} = x\,x' + y\,y' + z\,z'$

$$= (-a/2)(a/2) + 0(a/2) + (-a/2)0 = -a^2/4$$



Soit le repère orthonormé (A ; x ; y ; z)

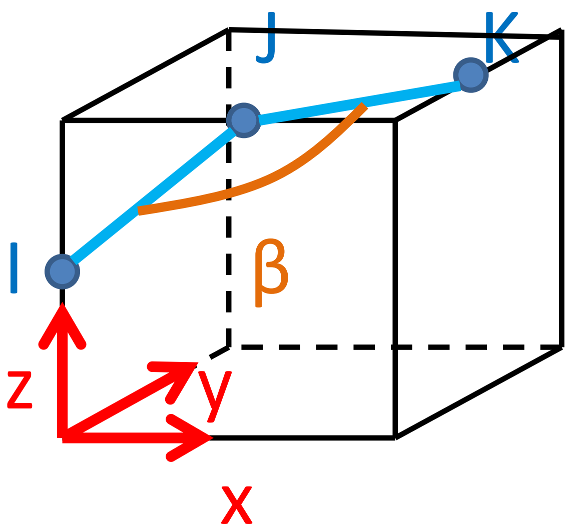
I	0	0	a/2
J	a/2	0	a
K	a	a/2	a

$\overrightarrow{JI}$ (- a/2 ; 0 ; - a/2) $\overrightarrow{JK}$ (a/2 ; a/2 ; 0).

Le repère est orthonormé donc $\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JK} = x\,x' + y\,y' + z\,z'$

$$= (-\,a/2)(a/2) + 0(a/2) + (-a/2)0 = -\,a^2/4$$

et $JI = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-a/2)^2 + 0^2 + (-a/2)^2} = a/\sqrt{2}$



et $JK = \sqrt{(a/2)^2 + (a/2)^2 + 0^2} = a/\sqrt{2}$

$\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JK} = JI \times JK \times \cos\beta$

Soit le repère orthonormé (A ; x ; y ; z)

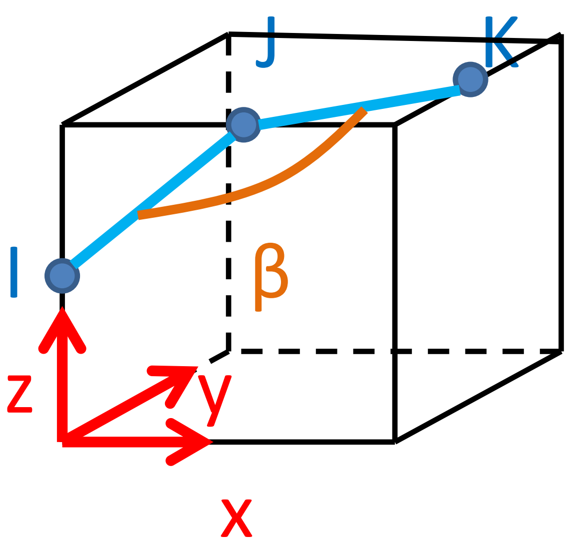
I	0	0	a/2
J	a/2	0	a
K	a	a/2	a

$\overrightarrow{JI}$ (- a/2 ; 0 ; - a/2) $\overrightarrow{JK}$ (a/2 ; a/2 ; 0).

Le repère est orthonormé donc $\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JK} = x\,x' + y\,y' + z\,z'$

$$= (-a/2)(a/2) + 0(a/2) + (-a/2)0 = -a^2/4$$

et $JI = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-a/2)^2 + 0^2 + (-a/2)^2} = a/\sqrt{2}$



et $JK = \sqrt{(a/2)^2 + (a/2)^2 + 0^2} = a/\sqrt{2}$

$\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JK} = JI \times JK \times \cos\beta$

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JK}}{JI \times JK} = \frac{-a^2/4}{(a/\sqrt{2}) \times (a/\sqrt{2})}$$

Soit le repère orthonormé (A ; x ; y ; z)

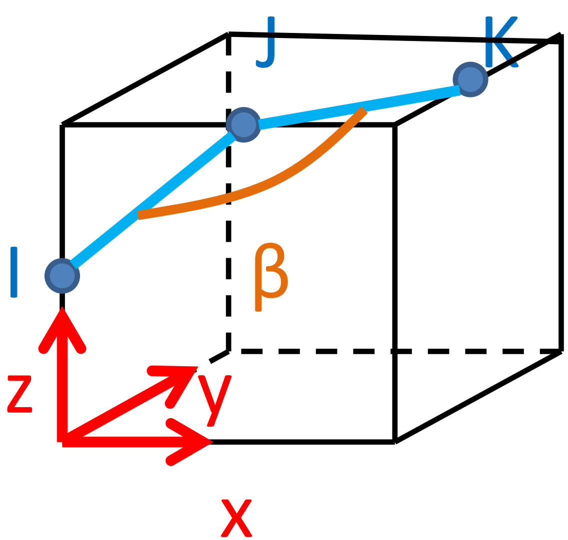
I	0	0	a/2
J	a/2	0	a
K	a	a/2	a

$\overrightarrow{JI}$ (- a/2 ; 0 ; - a/2) $\overrightarrow{JK}$ (a/2 ; a/2 ; 0).

Le repère est orthonormé donc $\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JK} = x\,x' + y\,y' + z\,z'$

$$= (-\,a/2)(a/2) + 0(a/2) + (-a/2)0 = -\,a^2/4$$

et $JI = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-a/2)^2 + 0^2 + (-a/2)^2} = a/\sqrt{2}$



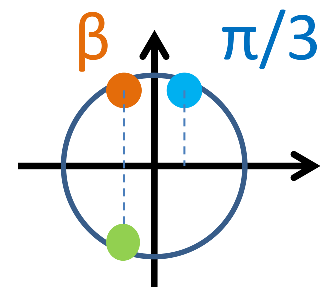
et $JK = \sqrt{(a/2)^2 + (a/2)^2 + 0^2} = a/\sqrt{2}$

$\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JK} = JI \times JK \times \cos\beta = -\,a^2/4$

$$\cos\beta = \frac{-\,a^2/4}{(a/\sqrt{2}) \times (a/\sqrt{2})} = -\,1/2$$

Soit le repère orthonormé (A ; x ; y ; z)

I	0	0	a/2
J	a/2	0	a
K	a	a/2	a

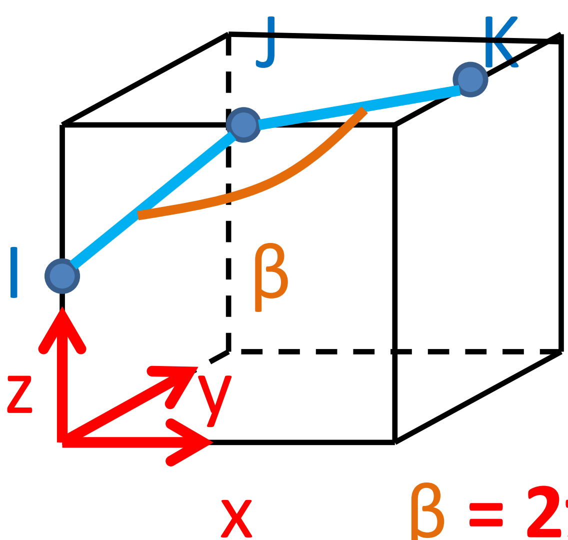


$\overrightarrow{JI}$ (- a/2 ; 0 ; - a/2) $\overrightarrow{JK}$ (a/2 ; a/2 ; 0).

Le repère est orthonormé donc $\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JK} = x\,x' + y\,y' + z\,z'$

$$= (- a/2)(a/2) + 0(a/2) + (-a/2)0 = - a^2/4$$

et $JI = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-a/2)^2 + 0^2 + (-a/2)^2} = a/\sqrt{2}$



et $JK = \sqrt{(a/2)^2 + (a/2)^2 + 0^2} = a/\sqrt{2}$

$$\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JK} = JI \times JK \times \cos \beta = - a^2/4$$

$$\Rightarrow \cos \beta = \frac{- a^2/4}{(a/\sqrt{2}) \times (a/\sqrt{2})} = - 1/2$$

β = 2π/3 *rad*