Exercice 14 :

On place 1000 € en intérêts composés à 3% (c'est-à-dire que les intérêts d'une année sont reversés au capital initial, donc produiront des intérêts l'année suivante, et que les intérêts annuels gagnés augmentent).

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par u_n = le capital de l'année n

1°) Tracez la courbe de la suite (les 5 premiers points).

2°) Démontrez que (u_n) est une suite géométrique.

3°) Déterminez u_{20} et le terme général. Quel est le capital en 2083 ?

4°) Utilisez le tableur de votre calculatrice pour en déduire la somme totale des intérêts perçus au bout de 20 années et la somme S des 21 premiers termes de la suite.

1°) Tracez la courbe de la suite

u_0 = 1000 € en intérêts composés annuels à 3%

$u_1 = u_0 + \text{Intérêts} = u_0 + 3\%\ u_0 = u_0 + 3\%(1000)$

$= u_0 + 30 = 1000 + 30 = 1030$

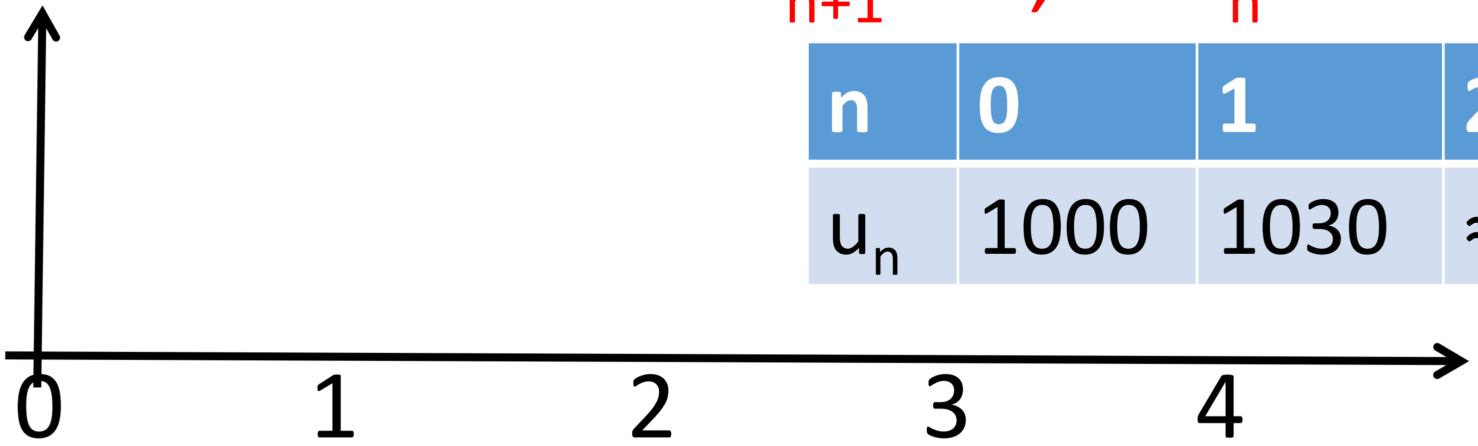
Les intérêts annuels gagnés en € augmentent

Donc $u_2 = u_1 + \text{Intérêts} = u_1 + 3\%\ u_1 = u_1 + 3\%(1030)$

$= 1{,}03\ u_1 = 1{,}03\ (1030) = 1060{,}9$

Même méthode : $u_{n+1} = 1{,}03\ u_n$

n	0	1	2	3	4
u_n	1000	1030	≈ 1061	≈1092	≈1126



1°) Tracez la courbe de la suite

u_0 = 1000 € en intérêts composés annuels à 3%

$u_1 = u_0$ + Intérêts $= u_0 + 3\%\ u_0 = u_0 + 3\%(1000)$

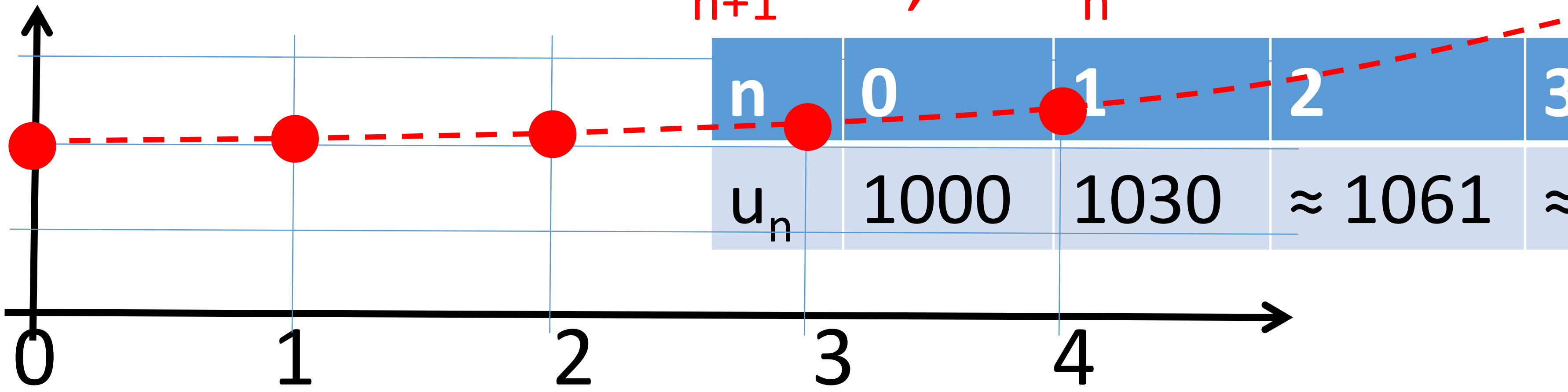
$= u_0 + 30 = 1000 + 30 = 1030$

Les intérêts annuels gagnés en € augmentent

Donc $u_2 = u_1$ + Intérêts $= u_1 + 3\%\ u_1 = u_1 + 3\%(1030)$

$= 1,03\ u_1 = 1,03\ (1030) = 1060,9$

Même méthode : $u_{n+1} = 1,03\ u_n$



n	0	1	2	3	4
u_n	1000	1030	≈ 1061	≈1092	≈1126

2°) Démontrez que (u_n) est une suite géométrique.

… ?

2°) Démontrez que (u_n) est une suite géométrique.

$u_{n+1} = u_n + \text{Intérêts} = u_n + 3\%\ u_n = 1{,}03\ u_n$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} = C^{te} = 1{,}03}$$

(C^{te} signifie « constante »)

$\Leftrightarrow$ la suite est géométrique de raison 1,03

3°) Déterminez u_{20} et le terme général.

2°) Démontrez que (u_n) est une suite géométrique.

$u_{n+1} = u_n + \text{Intérêts} = u_n + 3\%\ u_n = 1{,}03\ u_n$

$\Leftrightarrow \boxed{u_{n+1} / u_n = C^{te} = 1{,}03}$ (C^{te} signifie « constante »)

$\Leftrightarrow$ la suite est géométrique de raison 1,03

3°) Déterminez u_{20} et l'expression de u_n.

$$\boxed{\frac{u_{20}}{u_0} = q^{20-0}} \Leftrightarrow u_{20} = u_0\, q^{20} = 1000\,(1{,}03^{20})$$

$$\approx 1806{,}11$$

3°) Déterminez u_{20} et le terme général.

$$\boxed{\frac{u_{20}}{u_0} = q^{20-0}} \Leftrightarrow u_{20} = u_0\, q^{20} = 1000\,(\,1{,}03^{20}\,)$$

$$\approx 1806{,}11$$

Même méthode :

$$\boxed{\frac{u_n}{u_0} = q^{n-0}} \Leftrightarrow u_n = u_0\, q^{n} = 1000\,(\,1{,}03^{n}\,)$$

3°) Quel est le capital en 2083 ?

capital en 2009 = u_0

2083 = 2009 + 74 $\Rightarrow$ capital en 2083 = u_{74}

$$\boxed{\frac{u_{74}}{u_0} = q^{74-0}} \Leftrightarrow u_{74} = u_0\, q^{74} = 1000\,(\,1{,}03^{74}\,)$$

$$\approx 8911{,}58 \text{ €}$$

4°) Utilisez le tableur de votre calculatrice pour en déduire la somme totale des intérêts au bout de 20 années
et la somme S des 21 premiers termes de la suite.

u_n est fonction de n

n va constituer une Liste 1 de la calculatrice

u_n va constituer une Liste 2 de la calculatrice

que l'on va remplir avec la relation $u_n = f(n)$

On va cumuler les u_n dans une Liste 3

pour obtenir la somme des u_n

Etape 1 :

Tous les n de 0 à 20 :

on tape dans le Menu RUN

Seq (X , X , 0 , 20 , 1) stocké dans List 1

Seq et List se trouvent dans OPTN LIST

''*stocké dans*'' est la flèche du clavier

la virgule se trouve au clavier

Etape 1 :

Tous les n de 0 à 20 :

on tape dans le Menu RUN

Seq (X , X , 0 , 20 , 1) stocké dans List 1

Seq et List se trouvent dans OPTN LIST

''stocké dans'' est la flèche du clavier

la virgule se trouve au clavier

On peut vérifier dans Menu STAT

que tous les rangs n de 0 à 20 sont bien en Liste 1

n
0
1
…
17
18
19
20

Etape 2 :

Tous les termes u_n de u_0 à u_{20} :

on tape dans le Menu RUN

1000×(1,03^List 1) stocké dans List 2

Etape 2 :

Tous les termes u_n de u_0 à u_{20} :

on tape dans le Menu RUN

1000×(1,03^List 1) stocké dans List 2

On peut vérifier dans Menu STAT

que tous les termes u_n sont bien en Liste 2

n	$u_n \approx$
0	1000
1	1030
…	
17	1652,85
18	1702,43
19	1753,51
20	1806,11

Etape 3 :

Toutes les sommes de u_0 à u_n

pour n de 0 à 20 :

on tape dans le Menu RUN

Cuml List 2 stocké dans List 3

Cuml se trouve dans OPTN LIST

Etape 3 :

Toutes les sommes de u_0 à u_n

pour n de 0 à 20 :

on tape dans le Menu RUN

Cuml List 2 stocké dans List 3

Cuml se trouve dans OPTN LIST

On peut vérifier dans Menu STAT

que toutes les sommes $u_0 + u_1 + \dots + u_n$ sont bien en Liste 3

n	$u_n \approx$	$S_n \approx$
0	1000	1000
1	1030	2030
2	1060,9	3090,9
…		
18	1702,43	25116,87
19	1753,51	26870,37
20	1806,11	28676,49

Etape 3 :

Toutes les sommes de u_0 à u_n pour n de 0 à 20 :

on tape dans le Menu RUN

Cuml List 2 stocké dans List 3

Cuml se trouve dans OPTN LIST

$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$

$\approx 28676{,}49$

n	$u_n \approx$	$S_n \approx$
0	1000	1000
1	1030	2030
…		
17	1652,85	23414,43
18	1702,43	25116,87
19	1753,51	26870,37
20	1806,11	28676,49

Somme totale des intérêts perçus

= 1806,11 – 1000 = 806,11 €